

شمارش و احتمال:

اصول جمع) اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

اصول ضرب) اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که سرانجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر $m \times n$ روش قابل انجام

است نماد فاکتوریل

دو حالت خاص

$$n! = n \times (n - 1) \dots \times 2 \times 1$$

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

ترتیب) تعداد جایگشت های r تایی از n شی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های r شی از بین n شی متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد. با $P(n, r)$ نمایش می دهیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب) به هر انتخاب r شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد. یا به عبارتی به هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شی می گوئیم و آن را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad 0 \leq r \leq n$$

جایگشت های با تکرار: تعداد جایگشت های N شی که n_1 تای آن از نوع ۱، n_2 تای آن از نوع ۲ و n_k تای آن از نوع k است، برابر است با:

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

اصول متمم: فرض کنید A زیرمجموعه ای از S باشد، در این صورت تعداد اعضای S که در A قرار ندارد برابر است با:

$$n(A') = n(s) - n(k)$$

مثال: در یک شهر صنعتی 60 درصد جمعیت مرد و 40 درصد آن زن هستند. اگر 18 درصد مردان و 12 درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (تجربی 92)

$$15/2 \quad (1) \quad 15/6(2) \quad 15/8(3) \quad 16/2(4)$$

$$0/18 \times 0/60 + 0/12 \times 0/40 = 0/018 + 0/048 = 0/156$$

$$0/156 \times 100 = 15/6\%$$

مثال: از هریک از مدارس E و D و C و B و A ، چهار نفر به اردوگاه دانش آموزان ... شده اند. به چند طریق می توان 3 دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند انتخاب کرد؟ (تجربی 92)

$$160(1) \quad 320(2) \quad 480(3) \quad 640(4)$$

انتخاب 3 مدرسه از 5 مدرسه: $\binom{5}{3}$ و از هر یک از این سه مدرسه چهار حالت امکان پذیر است.

$$4 \times 4 \times 4$$

$$\binom{5}{3} \times 4^3 = 10 \times 64 = 640$$

مثال: گل فروش از 8 نوع گل مختلف به چند طریق، می توان دسته گل های متمایز درست کرد. به طوری که در هر دسته 5 تا 6 شاخه مختلف موجود باشد؟ (تجربی 98)

$$135(1) \quad 270(2) \quad 320(3) \quad 640(4)$$

$$\binom{5}{3} \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

مثال: تعداد جایگشت های حروف کلمه SYSEYEM به طوری که S ها کنار هم باشند کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱۸۰(۱) ۲۱۶(۲) ۲۴۰(۳) ۳۶۰(۴)

کل جایگشت ها $\frac{6!}{2!}$

اگر S ها را کنار هم قرار دهیم و آنها را شی در نظر بگیریم، تعداد جایگشت ها: $5!$ طبق اصل متمم وقتی می خواهیم S ها کنار هم نباشند:

$$\frac{6!}{2!} - 5! = \frac{6 \times 5!}{2} - 5! = 5!(3 - 1) = 5! \times 2 = 120 \times 2 = 240 \implies 3 \text{ گ}$$

حروف کلمه EARNEST را به چند طریق می توان در کنار هم داد به طوری که حرف N وسط قرار گیرد؟

(انسانی ۹۱) **INSTAGRAM : FARA_HOOSH99**

WEB : FARAHOOSH99.IR ۱۸۰(۱) ۲۱۶(۲) ۲۴۰(۳) ۳۶۰(۴)

--- N ---

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

احتمال

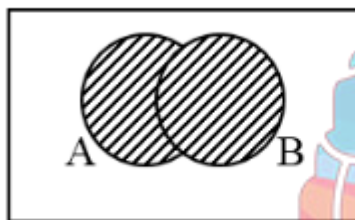
فضای نمونه ای (S): مجموعه شامل همه حالت های ممکن

پیشامد تصادفی (A): هر زیر مجموعه از S

احتمال پیشامد تصادفی:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



پیشامدها و برخی اعمال روی آنها:

$A \cup B$

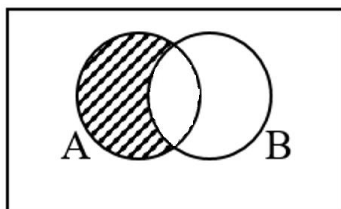
اجتماع $(A \cup B)$: وقتی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند)

اشتراک $(A \cap B)$: وقتی رخ می دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند. (هم پیشامد A رخ بدهد هم پیشامد B رخ بدهد.)



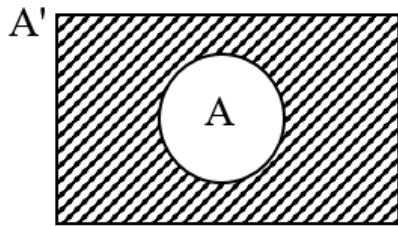
$A \cap B$

تفاضل $(A - B)$: وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



$A - B$

متمم (A' یا A'): وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.

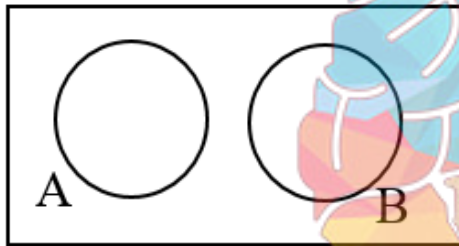


$$A \cup A' = S$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.

$$A \text{ و } B \leq (A \cap B = \emptyset)$$



❖ برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

❖ برای دو پیشامد ناسازگار A و B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

❖ برای متمم یک مجموعه: WEB : FARAHOOSH99.IR

$$P(A) = 1 - P(A')$$

مثال: در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می کنیم، سپس از بین بقیه مهره ها ۲ مهره بیرون می کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر سفید است؟ (تجربی ۹۸)

$$\frac{5}{22} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{11} \text{ (۳)}$$

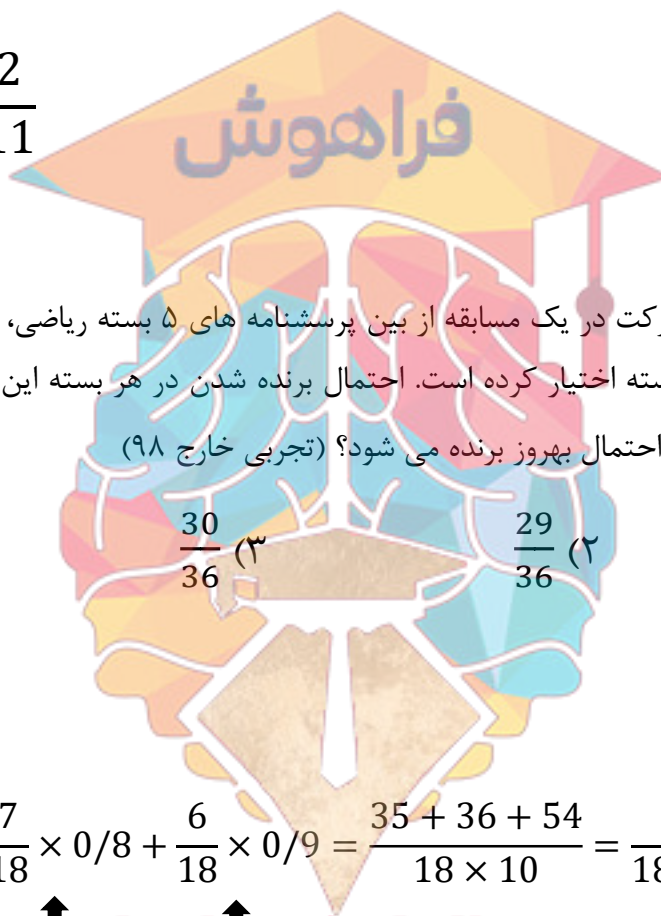
$$\frac{2}{11} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{11} \text{ (۱)}$$

چون از رنگ مهره اول خبر نداریم انگار از کیسه مهره ای خارج نشده است

گ ۲

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$



مثال: بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه از بین پرسشنامه های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸، ۰/۹ است. با کدام احتمال بهروز برنده می شود؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\frac{31}{36} \text{ (۴)}$$

$$\frac{30}{36} \text{ (۳)}$$

$$\frac{29}{36} \text{ (۲)}$$

$$\frac{25}{36} \text{ (۱)}$$

گ ۲

$$\frac{5}{18} \times 0/7 + \frac{7}{18} \times 0/8 + \frac{6}{18} \times 0/9 = \frac{35 + 36 + 54}{18 \times 10} = \frac{145}{18 \times 10} = \frac{29}{36}$$

↑ احتمال انتخاب بسته ریاضی

↑ انسانی

↑ تجربی

مثال: دو تاس را با هم می اندازیم، احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده ضرب ۴ باشد کدام است؟ (تجربی ۹۷) و (تجربی ۹۲)

$$\frac{5}{18} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{9} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

نکته: تعداد کل حالات پرتاب n تاس یا یک تاس به تعداد n بار: 6^n

نکته: تعداد کل حالات پرتاب n سکه یا یک سکه به تعداد n بار: 2^n

گ ۱

مضارب ۴ به ازای	$\frac{4}{3}$ ، $\frac{8}{6}$ ، $\frac{12}{6}$	} حالت ۹
مجموع دو تاس	۳ و ۱ ، ۲ و ۶	
	۲ و ۲ ، ۳ و ۵	
	۵ و ۳	
	۴ و ۴	

کل حالات c :

$$6^2 = 36$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

مثال: ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام حاصلضرب آن از ۱۰ بیشتر است؟ (ریاضی ۹۷).

۰/۷۵ (۴) ، ۰/۷ (۳) ، ۰/۶۵ (۲) ، ۰/۶ (۱)

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

گ ۳

کل حالات: $\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 20$

ضرب کمتر از ۱۰ :

۱×۲ ، ۲×۳ ، ۵×۲

۱×۴

۱×۶

۱×۸

حالت ۶

ضرب بیشتر از ۱۰ :

$$20 - 6 = 14 \text{ حالت}$$

$$P(A) = \frac{14}{20} = 0.7$$

مثال: در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیا خارج نمی شود؟ (تجربی ۹۲)

$$0.1 (1) \quad 0.15 (2) \quad 0.2 (3) \quad 0.25 (4)$$

فرد - زوج - فرد - زوج - فرد : ترتیب خروج باید اینطور باشد

$$P(A) = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{5!} = \frac{12}{120} = 0.1$$

مثال: در ظرفی ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی است؟ (تجربی خارج ۹۳)

$$\frac{31}{42} (1) \quad \frac{37}{42} (2) \quad \frac{67}{84} (3) \quad \frac{73}{84} (4)$$

A' هیچ مهره آبی خارج نشود: حالت متمم

گروه مشاوره فراهوش

INSTAGRAM: FARA-HOOSH99

WEB: FARAHOOSH99.IR

$$1 - P(A') = 1 - \frac{5}{84} = \frac{37}{84} \quad \text{گ ۲}$$

نکته:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

مثال: اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند. تعداد $A \cap B'$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

$$32 (4) \quad 16 (3) \quad 8 (2) \quad 4 (1)$$

۴ عضو دارد $2^4 = 16$ زیر

$$A \cap B' = A - B = \{1, 2, \{2\}\} \cup \{1, \{1, 2\}\}$$

نکته یادآوری از مجموعه ها: مجموعه دارای n عضو دارای 2^n زیرمجموعه است.

$$A - B = A \cap B'$$

مثال: در جعبه ای ۳ مهره سفید، ۲ سیاه، ۵ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نیستند؟ (تجربی ۹۴)

$$\frac{32}{45} \quad (۴)$$

$$\frac{31}{45} \quad (۳)$$

$$\frac{29}{42} \quad (۲)$$

$$\frac{28}{41} \quad (۱)$$

$$\binom{1}{1} \text{ سیاه} \quad \text{یا} \quad \binom{1}{1} \text{ سفید} \quad \text{یا} \quad \binom{1}{1} \text{ قرمز}$$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 + 15 + 10}{45} = \frac{31}{45}$$

گ ۳

+ احتمال شرطی: منظور از احتمال A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می دهیم، احتمالاً وقوع پیشامد A است به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq 0$$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

+ پیشامدهای مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هر گاه وقوع B بر احتمال وقوع A تاثیر نگذارد:

$$P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

+ قانون احتمال کل:

افزار: افزارهای یک مجموعه هیچ اشتراکی، با یکدیگر ندارند و اجتماع آنها فضای نمونه را تشکیل می دهد.

$$1) A_1 \cup A_2 \cup A \dots \cup A_n = S$$

$$2) A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

$$\Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset \quad 1 \leq i, j \leq n)$$

$$i \neq j$$

S



- حال اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1 و A_2 و \dots و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه ای S یک افزار تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد و رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کلی می گوییم.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال: احتمال موفقیت فردی در آزمون اول 0/7 است و در آزمون دوم 0/6 است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم 0/8 است. با کدام احتمال لااقل در یکی از این دو آزمون موفق می شود؟ (تجربی 98)

$$P(A \cup B) = 0/74 \quad (2) \quad 0/76 \quad (3) \quad 0/82 \quad (4) \quad 0/84$$

$$P(B|A) = 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/7} \rightarrow P(A \cap B) = 0/56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56 = 1/3 - 0/56 = 0/74$$

گ ۱

مثال: احتمال موفقیت فردی در یک آزمون مستقل دو برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\frac{2}{3} \text{ (۴ *)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

$$P(A) = 2P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{9} = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{P(A)^2}{2} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{P(A)^2}{2} - \frac{3P(A)}{2} + \frac{7}{9} = 0 \quad \Delta = \frac{9}{4} - \frac{14}{9} = \frac{25}{36}$$

$$P(A) = \frac{3 \pm \frac{5}{6}}{1} \begin{cases} \frac{14}{6} \\ \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

مثال: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $\frac{1}{9}$ و برای شخص B $\frac{1}{8}$ است. با کدام احتمال لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر موفقیت آمیز است؟ (تجربی ۹۵)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

A و B دو پیشامد مستقل هستند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = 0/9 + 0/8 - 0/72 = 0/98$$

گ ۴

مثال: امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه علمی شرکت می کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

$$\frac{6}{7} \text{ (۴)}$$

$$\frac{11}{14} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{7} \text{ (۲)}$$

$$\frac{9}{14} \text{ (۱)}$$

$$r(A) = 0/6$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0/5 = \frac{P(A \cap B)}{0/3} \rightarrow P(A \cap B) = 0/15$$

$$P(A) = 0/3$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B')}$$

$$\rightarrow P(A|B') = \frac{0/6 - 0/15}{1 - 0/3} = \frac{0/45}{0/7} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$$

مثال: در جعبه ای ۶ مهره سفید، ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره دوم، سفید است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

$$0/72 \text{ (۴)}$$

$$0/64 \text{ (۳)}$$

$$0/6 \text{ (۲)}$$

$$0/5 \text{ (۱)}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} = \frac{54}{90} = 0/6$$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR