

تابع یک به یک:

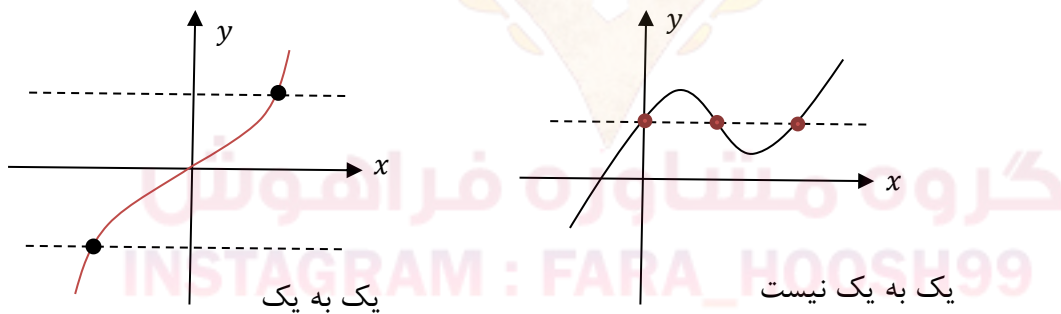
تابع f را یک به یک گوئیم اگر، به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

نمایش زوج مرتب: هیچ دو زوج متمایزی، دارای مولفه دوم برابر نباشند. اگر یکی بود مولفه های اولشان با هم برابر باشد.

$$f = \{(1, 0), (2, 3), (5, -1)\} \quad \text{یک به یک} \quad g = \{(1, 0), (2, 3), (5, 2)\} \quad \text{یک به یک نیست}$$

نمایش نموداری: در نمایش نموداری اگر خطی موازی محور x ها رسم کردیم و نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع یک به یک است و اما اگر بیشتر از یک نقطه قطع کند یک به یک نیست.



تابع وارون: هرگاه $f: A \rightarrow B$ یک به یک باشد، تابع معکوس f یعنی f^{-1} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1} = \{(x, y) | (x, y) \in f\} \quad y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = D_f$$

- اگر نقطه $A(a, b) \in f$ ، آنگاه نقطه $A'(b, a) \in f^{-1}$ به بیان دیگر:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

- تابع f معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

یافتن ضابطه تابع معکوس:

الف: برد تابع با ضابطه ی $y = f(x)$ را پیدا می کنیم.

ب: از رابطه ی $y = f(x)$ ، x را بر حسب y می یابیم.

ج: جای X و Y ، را در رابطه به دست آورد عوض می کنیم، نتیجه $y = f^{-1}(x)$ خواهد بود. دامنه تابع f^{-1} را کنار آن می نویسیم.

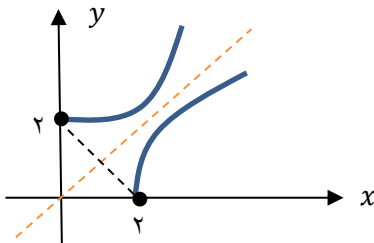
مثال: ضابطه معکوس تابع یا ضابطه ی $f(x) = x\sqrt{x} + 1$ را بیابید.

$$D_f: x \geq 0$$

$$x \geq 0 \rightarrow x\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow x\sqrt{x} + 1 \leq 1 \rightarrow y \geq 1 \quad \text{برد}$$

$$\begin{aligned} y = x\sqrt{x} + 1 &\rightarrow y - 1 = x\sqrt{x} \rightarrow (y - 1)^2 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{(y - 1)^2} \rightarrow f^{-1}(x) \\ &= \sqrt{(x - 1)^2} ; x \geq 1 \end{aligned}$$

نمودار تابع معکوس: اگر نقطه ی $A(a, b)$ روی تابع f باشد، آنگاه نقطه ی $A'(b, a)$ روی تابع f' است، همچنین می دانیم نقاط $A(a, b)$ و $A'(b, a)$ قرینه یکدیگر نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم هستند، بنابراین:



مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ را به دست آورید. (سراسری ریاضی)

(۸۸)

$$f(a) = 4$$

$$4 = f(a) = -a + \sqrt{-2a} \rightarrow a + 4 = \sqrt{-2a} \quad -2a \geq 0 \rightarrow a \leq 0$$

$$a + 4 \geq 0 \rightarrow a \geq -4$$

$$\rightarrow (a + 4)^2 = -2a \rightarrow a^2 + 8a + 16 = -2a$$

$$\rightarrow a^2 + 10a + 16 = 0 \rightarrow (a + 2)(a + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -8 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

مثال: ضابطه ی وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

$$y = \sqrt{x} ; x \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

$$y^2 = x \rightarrow \overline{y = x^2} ; x \geq 0$$

$$y = -\sqrt{-x} ; x < 0 \rightarrow y < 0$$

$$y^2 = -x \rightarrow x = -y^2 \rightarrow \overline{y = -x^2} ; x < 0$$

گزینه مورد نظر $y = x|x| ; x \in k$

مثال: ضابطه ی وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

$$y = \frac{1-|x|}{|x|} ; |x| > 1 \quad (۲)$$

$$y = \frac{x}{1-|x|} ; |x| < 1 \quad (۱)$$

$$y = \frac{|x|-1}{x} ; |x| < 1 \quad (۴)$$

$$y = \frac{x}{|x|-1} ; |x| > 1 \quad (۳)$$

نقطه (۰ و ۰) روی تابع ← نقطه ی (۰ و ۰) روی معکوس تابع ← فقط در گزینه ۱

تمرین: ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی-۹۲)

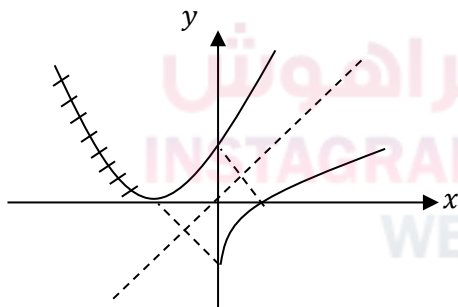
جواب آخر: $a \leq 2$; $y = x^2 - 4x + 5$

مثال: دو تابع $g = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ و $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ مفروض اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج-۹۰)

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$$

مثال: تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1 + \infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند چند نقطه متقاطع هستند؟ (سراسری ریاضی-۹۲)



در هیچ نقطه ای همدیگر را قطع نمی کنند.

مثال: اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد نمودارهای دو تابع f^{-1} و $\frac{x-9}{4}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

(تجربی ۹۸)

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

$$y + 3 = x^2 - 2x \rightarrow y + 4 = x^2 - 2x + 1$$

$$y + 4 = (x - 1)^2 \rightarrow \sqrt{y + 4} = x - 1$$

$$\rightarrow x = \sqrt{y + 4} + 1 \rightarrow y = \sqrt{x + 4} + 1$$

$$\sqrt{x + 4} + 1 = \frac{x - 9}{2}$$

$$\sqrt{25} + 1 = \frac{21 - 9}{2} \rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$$

مثال: دو تابع $f = \{(2, 5), (3, 6), (7, 3), (1, 4)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $(9, a)$ و

$f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$\frac{5}{2} (4)$$

$$\frac{3}{2} (3)$$

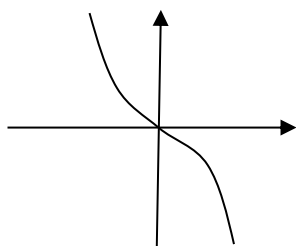
$$\frac{3}{4} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

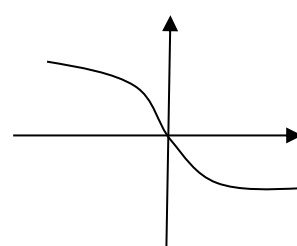
$$f(6) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 6 \Rightarrow g(2a) = 3$$

$$\rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \rightarrow 2a = 6a - 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

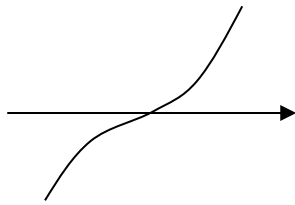
مثال: اگر $f(x) = x|x|$ باشد نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)



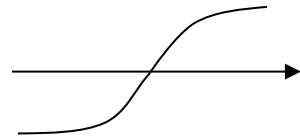
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

نقطه (۲ و ۴) روی ماده صدق می کند.

پس (۲ و ۴) باید روی معکوس آن صدقند در نتیجه گزینه های ۱ و ۲ حذف می شوند. گزینه ۴ هم مربوط به شکل تابع است در نتیجه جواب گزینه ۳ است.

مثال: اگر $f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۶)\}$ و $g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (۵, ۶), (۳, ۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

(۱) $\{(۴, ۲) \text{ و } (۵, ۲)\}$

(۲) $\{(۴, ۲) \text{ و } (۳, ۵)\}$

(۳) $\{(۵, ۲) \text{ و } (۲, ۴)\}$

(۴) $\{(۳, ۵) \text{ و } (۲, ۴)\}$

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (۵, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(۵, ۳), (۶, ۲), (۴, ۱)\}$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \left\{ \left(\frac{۲}{۱}, \frac{۶}{۳} \right), \left(\frac{۵}{۳}, \frac{۶}{۳} \right) \right\} = \{(۴, ۲) \text{ و } (۵, ۲)\}$$

مثال: نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع هستند.

اگر $f(۲) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(۲۷)$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۵)

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = 3^{-a+b}$$

$$\rightarrow 3^2 = 3^{-a+b} \rightarrow -a + b = 2 \quad \text{گزینه ۲}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \rightarrow 3^{2a+b} = \frac{1}{3} \rightarrow 2a + b = -1$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \xrightarrow{\times(-1)} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 3^{-x+1} \quad f^{-1}(27) = m \Rightarrow f(m) = 27$$

$$f(m) = 3^{-m+1} = 27 = 3^3 \rightarrow -m + 1 = 3 \rightarrow m = -2$$

مثال: ضابطه ی وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (تجربی -۹۶)

$$-x^2 \quad (1)$$

$$x^2 \quad (2)$$

$$x|x| \quad (3)$$

$$-x|x| \quad (4)$$

نقطه (۲ و ۴) روی تابع صدق می کند پس (۲ و ۴) باید روی معکوس آن صدق کند ← حذف گزینه های ۱ و ۴

نقطه ی (-۲ و -۴) روی تابع صدق می کند پس (-۲ و -۴) باید روی معکوس آن صدق کند. ← حذف گزینه ۲

جواب گزینه ۳ است.

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۸)

(۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (2, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4 - 2), (2, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (2, -1)\}$$

گزینه ۴ برد: $\{2, -1\}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$(f \circ g)^{-1}(8) = (g^{-1} \circ f^{-1})(8) \quad f \circ g(x) = \frac{2}{5}(x^3 + x) - 4$$

$$(f \circ g)^{-1}(8) = m \rightarrow f \circ g(m) = 8 \rightarrow f \circ g(m) = \frac{2}{5}m^3 + \frac{2}{5}m - 4 = 8$$

$$\rightarrow \frac{2}{5}m^3 + \frac{2}{5}m - 12 = 0 \quad \text{WEB : FARAHOOSH99.IR}$$

$$\frac{2}{5} \times (27) + \frac{2}{5} \times (3) - 12 = \frac{54}{5} + \frac{6}{5} - 12 = 0 \quad \text{قراردادن ۴ گزینه}$$