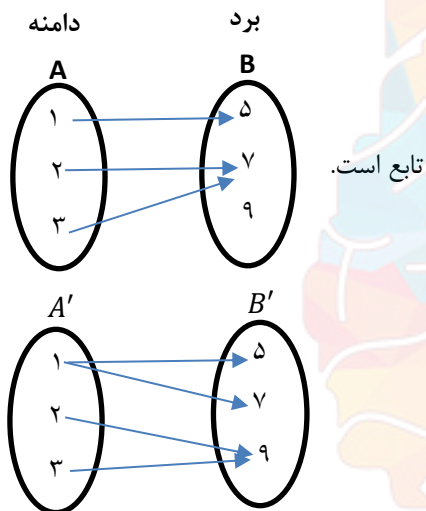


تابع :

ب
ع

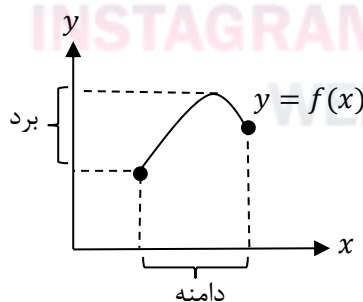
- یک رابطه مجموعه ای از زوج های مرتب است.
- دوزوج مرتب $(a و b)$ و $(c و d)$ را مساوی گویند هرگاه $a = c$ و $b = d$



نمایش تابع : از هر عضو A دقیقاً باید یک فلش خارج شود ولی مهم نیست چند فلش به هر یک از اعضای B وارد می شود.

تابع نیست زیرا دو فلش از ۱ خارج شده است یعنی به ازای ورودی ۱ دو خروجی داریم، در حالی که تابع به ازای یک ورودی، یک خروجی می دهد.

«نمایش ماشینی تابع»



نمایش نموداری تابع:

ب
ع

- نمایش زوج مرتبی تابع : هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن $g(x) =$ تابع است $f = \{(1 و 2), (3 و 1), (5 و 3)\}$ مثال دارای مولفه ی اول برابر نباشند. تابع نیست $\{(1 و 2), (1 و 4)\}$

- نمایش ضابطه ای یک تابع : در نمایش ضابطه ای بین x (ورودی) و y (خروجی) رابطه ی مشخصی وجود دارد و می نویسیم $y = f(x) \leftarrow$ برای محاسبه ی $f(a)$ کافی است $a \in D_f$ را جایگزین x کنیم. دقت کنید a می تواند یک عدد یا متغیر یا یک تابع باشد.

مثال: اگر $f(x) = (x^2 + 1)^3$ ، آنگاه $f(2)$ و $f(2x)$ را بیابید.

$$f(2) = (2^2 + 1)^3 = 5^3 = 125 \quad f(2x) = ((2x)^2 + 1)^3 = (4x^2 + 1)^3$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ، آنگاه $f(-1 - x^2)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $-1 - x^2$ مقداری منفی است، از ضابطه ی پایینی استفاده می شود:

$$f(-1 - x^2) = -1$$

مثال: رابطه ی $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z} \text{ و } |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟ (سراسری

ریاضی - ۸۸)

$$\mathbb{R} = \{(1, 1) \text{ و } (-1, -1) \text{ و } (1, -1) \text{ و } (-1, 1) \text{ و } (0, 2) \text{ و } (2, 0) \text{ و } (-2, 0) \text{ و } (0, -2)\}$$

← هشت عضو زوج مرتب دارد.

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = a \cdot b^x$ ؛ $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{4}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$

کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

$$f(0) = a \cdot (b)^0 = a \times 1 = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$f(-2) = a \cdot (b)^{-2} = \frac{a}{b^2} = \frac{3}{32} \rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = \frac{3}{32} \rightarrow b^2 = 32 \times \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow b^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} b = 4 & \checkmark \\ b = -4 & \times \end{cases} \quad \text{در صورت سوال گفته شده } b > 0$$

$$\rightarrow f(x) = a \cdot b^x = \frac{3}{4} \cdot (4)^x \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \times (4)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \times \sqrt{4^3} = 12$$

مثال: اگر نمودار $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a^2}{b} = \frac{9}{4} \rightarrow b = \frac{4}{9}a^2$$

$$f(1) = 11 = a(b)^1 - 1 = ab - 1 \rightarrow ab = 12$$

$$\rightarrow a\left(\frac{4}{9}a^2\right) = 12 \rightarrow \frac{4}{9}a^3 = 12 \rightarrow a^3 = 27 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = \frac{4}{9} \times (3)^2 = 4$$

$$\rightarrow f(x) = 3(4)^x - 1 \rightarrow f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

مثال: اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

$$\begin{aligned} \text{تغییر متغیر: } x-3 = t \rightarrow x = t+3 \rightarrow f(t) &= (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \\ &= t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 = t^2 + 2t + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(1-x) &= (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = x^2 + 1 - 2x + 2 - 2x + 2 \\ \rightarrow f(1-x) &= x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

مثال: نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۲ قطع کند $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۸)

$$\begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}$$

$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B} = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \rightarrow A+B = -1$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = (2)^2 - 2 = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 \rightarrow 2A+B = -2$$

$$\begin{cases} A+B = -1 \times (-1) \rightarrow -A-B = 1 \xrightarrow{+} A = -1 \\ 2A+B = -2 \rightarrow 2A+B = -2 \xrightarrow{-} B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 8 = 6 \quad \text{گزینه ۳}$$

تمرین: نمودار یک تابع به صورت $f(x) = 3^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2$ را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۳ قطع می کند. عرض نقطه تلاقی تابع f با محور y ها کدام است؟ (خارج ریاضی-۹۸)

$\frac{1}{27}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

مثال: اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد ضابطه ی $f(x)$ کدام است؟ (تجربی-۹۷)

$x^2 - x + 3$ (۱) $x^2 - 2x - 1$ (۲)

$x^2 - 2x + 1$ (۳) $x^2 - x + 1$ (۴)

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13$$

$$f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1$$

دامنه تابع: دامنه تابع بزرگترین زیر مجموعه از اعداد حقیقی است که اگر هر عضو آن را به جای x (ورودی)

قرار دهیم، y (خروجی) نیز عددی حقیقی باشد یعنی: $D = \{x | f(x) \in \mathbb{R}\}$

دامنه توابع مهم: -

۱) $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k \quad D_f = \mathbb{R}$

مثال: $y = 3x^4 - 4x^3 + 2x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۲) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ توابع کسری $D_h = \mathbb{R} - \{x | g(x) = 0\}$ چند جمله ای اند

مثال: $y = \frac{x^2 + 1}{x} \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$

اگر فرجه فرد باشد: دامنه ی تعریف همان دامنه ی
 زیر رادیکال است.

۳) $f(x) = \sqrt[2x+1]{g(x)}$ توابع رادیکال با فرجه فرد (۳)

مثال: $y = \sqrt[6]{x^6 + 2x}$ $D = \mathbb{R}$

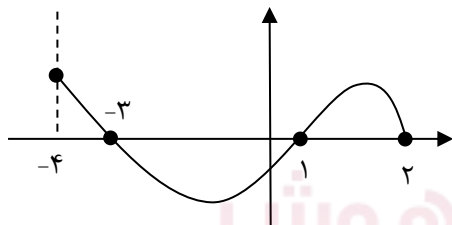
۴) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ $D_f: \{x | g(x) \geq 0\}$ توابع رادیکال با فرجه زوج (۴)

مثال: $y = \sqrt{2x-1}$ $\rightarrow 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ $D = x \geq \frac{1}{2} = [\frac{1}{2}, +\infty)$

۵) $h(x) = \log_{g(x)} f(x)$ توابع لگاریتمی $D_h = \{x | f(x) > 0 \text{ و } g(x) > 0 \text{ و } g(x) \neq 1\}$

مثال: $y = \log \sqrt{x-1}$ $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$ $D = (1, +\infty)$

مثال: شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی



(۹۲-

یا x و $f(x)$ هر دو مثبت باشند. $xf(x) \geq 0$

یا x و $f(x)$ هر دو منفی باشند.

$\rightarrow [-3 \text{ و } 0]$ جز دامنه است

$-3 \leq x \leq 0 \rightarrow f(x) \leq 0$

$1 \leq x \leq 2 \rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow [-3 \text{ و } 0] \cup [1 \text{ و } 2]$

پس $\rightarrow [1 \text{ و } 2]$ جز دامنه است

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی -۹۲)

$f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} = \sqrt{6 - 2x - x^2 - 9 + 6x} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

$$\rightarrow x^2 + 4x - 3 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \quad x = 1 \text{ و } x = 3$$

$$\begin{array}{c} 1 \qquad 3 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline \end{array} \Rightarrow D = +1 \leq x \leq +3 \text{ یا } x \in [1, 3]$$

اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۴/۵ (۴) ۳/۵ (۳) ۲/۵ (۲) ۱/۵ (۱)

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \quad \text{با توجه به این که حاصل رادیکال با فرجه زوج همواره یک عدد مثبت}$$

$$2 - 3a > 0 \rightarrow a < \frac{2}{3} \quad \text{است، پس:}$$

توان ۲ $\rightarrow 2a^2 + 4a = (2 - 3a)^2 = 9a^2 - 12a + 4 \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$

$$\Delta = 256 - 4(4)(7) = 144 \quad \frac{16 \pm 12}{14} \begin{cases} \rightarrow \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \text{ ق ق} \\ \rightarrow 2 \text{ غ ق} \end{cases} \quad \boxed{a < \frac{3}{2}} \text{ با توجه شرط}$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{5}{2} \quad \text{گزینه ۴}$$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM: FARA_HOOSH99
WEB: FARAHOOSH99.IR

مثال: اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۸)

۲۱ (۴) ۱۵ (۳) ۶ (۲) ۴ (۱)

$$\sqrt{3a + 16} = 1 - 2a \quad 1 - 2a > 0 \rightarrow \boxed{a < \frac{1}{2}}$$

توان ۲ $\rightarrow 3a + 16 = (1 - 2a)^2 = 4a^2 - 4a + 1 \rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0$

$$\Delta = 49 + 240 = 289 \quad \frac{+7 \pm 17}{8} \begin{cases} \rightarrow \frac{3}{8} \times \\ \rightarrow -\frac{5}{4} \checkmark \end{cases} : a < \frac{1}{2}$$

$$4a + 9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 \quad \text{گزینه ۱}$$

رابطه و تابع، نمودار انتقال:

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را مساوی گوییم هرگاه: (۱) دامنه ی آنها با هم برابر باشد.

(۲) برای هر x از دامنه ی آن ها $f(x) = g(x)$

مثال: آیا دو تابع $f(x) = x\sqrt{-x}$ و $g(x) = \sqrt{-x^3}$ مساویند؟

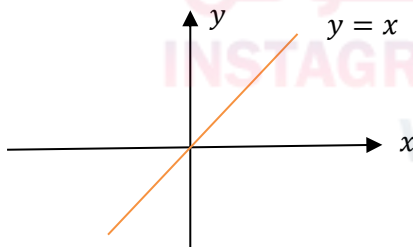
$$D_f: -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0$$

$$D_g: -x^3 \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \quad \text{شرط اول را دارند}$$

$$\begin{array}{l} \text{به ازای } x \leq 0 \\ \rightarrow \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{array} \rightarrow \text{پس شرط دوم را ندارند و مساوی نیستند}$$

تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، آن تابع را همانی گوییم.

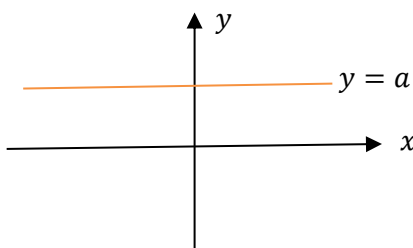
به عنوان مثال تابع $f = \{(1, 1) \text{ و } (2, 2) \text{ و } (3, 3)\}$ یک تابع همانی است. نمودار تابع همانی نیمساز ناحیه اول و سوم یا بخشی از آن است. معادله تابع همانی را با $f(x) = x$ نمایش می دهیم.



تابع ثابت: هر تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت گوییم. به عنوان مثال

$f = \{(1, 0) \text{ و } (2, 0) \text{ و } (3, 0)\}$ را یک تابع ثابت گوییم. معادله تابع ثابت را یک تابع گویا گوییم.

معادله ی تابع ثابت را با ضابطه ی $f(x) = a$ نمایش می دهیم.



اعمال جبری روی توابع: اگر f و g دو تابع با دامنه های D_f و D_g باشند آنگاه:

$$\textcircled{1} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$\textcircled{2} \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$\textcircled{3} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ مفروضند، تابع های $f + g$ و $f \cdot g$ و دامنه ی آنها را بیابید. مقدار $(f + g)(1)$ و $(f \cdot g)\left(\frac{1}{4}\right)$ را محاسبه کنید.

$$D_f: x \geq 0 \\ D_g: 1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f \cap D_g: 0 \leq x \leq 1$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$(f + g)(1) = \sqrt{1} + \sqrt{1-1} = 1$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x} \quad (f \cdot g)\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- نمایش زوج مرتبی اعمال روی توابع: در زوج مرتب های با مولفه ی اول برابر (اشتراک دامنه ها) عمل خواسته شده را بر روی مولفه ی دوم انجام می دهیم.

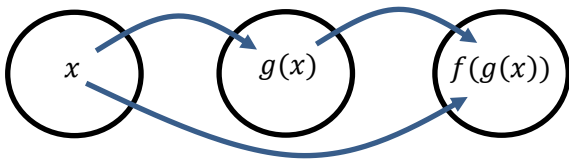
مثال: اگر $f = \{(1, 2) \text{ و } (2, 4) \text{ و } (3, 5)\}$ و $g = \{(1, 3) \text{ و } (3, 0)\}$ مطلوبست:

$$\text{الف) } f \cdot f = \{(1, 2 \times 2) \text{ و } (2, 4 \times 4) \text{ و } (3, 5 \times 5)\} = \{(1, 4) \text{ و } (2, 16) \text{ و } (3, 25)\}$$

$$\text{ب) } f \cdot g = \{(1, 2 \times 3) \text{ و } (3, 0 \times 5)\} = \{(1, 6) \text{ و } (3, 0)\}$$

ترکیب توابع:

$$x \rightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \rightarrow f(g(x))$$



$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند، آنگاه ضابطه ی $f \circ g(x)$ و دامنه و برد تابع را بدست آورید.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1 \quad D_g: x \geq 0 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

$$x \geq 0 \rightarrow f \circ g(x) \geq 1 \rightarrow R_{f \circ g} = [1, +\infty)$$

- نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع:

مثال) اگر $f = \{(7, 4) \text{ و } (9, 2) \text{ و } (3, 1)\}$ و $g = \{(2, 7) \text{ و } (4, 9) \text{ و } (5, 11)\}$ ، آنگاه تابع $f \circ g$ را پیدا کنید.

- در هر مورد که مولفه ی اول f با مولفه دوم g برابر است ، زوج مرتبی شامل مولفه ی اول g و مولفه ی دوم f عضو $f \circ g$ می باشد:

$$f \circ g = \{(2, 4) \text{ و } (4, 2)\}$$

مثال: دو تابع f و g مفروض اند در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟ (سراسری ریاضی خارج - ۸۹)

$$(۱) \quad g(x) = \log x^2 \quad f(x) = 2 \log x \leftarrow \text{شرط اول: } \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_g: x^2 > 0 \quad D_f: x > 0$$

پس شرط اول را ندارد. $D_f \neq D_g \rightarrow$

$$(۲) \quad g(x) = 1 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \leftarrow \text{شرط اول: } D_f: |x| = 0 \rightarrow x = 0 \quad D_g: \mathbb{R}$$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

$$(۳) \quad g(x) = x \quad f(x) = (\sqrt{x})^2 \leftarrow \text{شرط اول: } D_f: x \geq 0 \rightarrow D_f \neq D_g \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$(۴) \quad g(x) = \frac{|x|}{x} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} \leftarrow \text{شرط اول: } D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

شرط دوم:

$$\begin{aligned} x \geq 0 & \rightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1 & g(x) = \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 & \rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} = -1 & g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

$f(x) = g(x)$

مثال: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج - ۹۲)

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\sin^2 x) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x = \sin x(\sin x - 1) \\ &= -\sin x \cos^2 x = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) + 3 = 5 & f(f(1)) &= f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2 \\ f(5) &= 2 & f(f(5)) &= f(2) = 2(2) + 3 = 7 \\ \rightarrow f(f(1)) + f(f(5)) &= 7 + 2 = 9 \end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ ، نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ با کدام طول متقاطعند؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = (2(x+2) - 3)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ f(x) &= 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f \circ g(x) = f(x) \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \\ &\rightarrow 16x = 8 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow [g] \rightarrow [l] \rightarrow x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج-۹۱)

$$g(f(x)) = 2x \Rightarrow 2x = 3f(x) + 4 \rightarrow f(x) = \frac{2x - 4}{3}$$

$$g(f(x)) = 3f(x) + 4$$

$$\rightarrow f(5) = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، آنگاه مجموع طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟ (سراسری تجربی -۹۱)

جواب اخر $x \in (-4, 1)$

مثال: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $f = \{(2, 3), (5, 6), (4, 5), (1, 2)\}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (2, 3)\}$ ، آنگاه $g(f(a)) = 5$ ، عدد a کدام است؟ (سراسری تجربی -۹۱)

$$g(f(a)) = 5 \rightarrow f(a) = 6 \rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4$$

مثال: تابع $f = \{(1, 7), (4, 5), (3, 2), (2, 1)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $f \circ g \in (2, 4)$ و $b = 5$ ، دو تایی (a, b) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

$$(a, 2) \in f \circ g \rightarrow a = 4 \Rightarrow (a, b) = (4, 5)$$

مثال: اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f \circ g(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \quad g(x) = 3 = 2x - 1 \rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow f(g(2)) = f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

تمرین: $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آن گاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی خارج - ۹۰)

$$x^2 + 2x \quad (۴)$$

$$x^2 - 2x \quad (۳)$$

$$x^2 + 1 \quad (۲)$$

$$x^2 - 1 \quad (۱)$$

مثال: به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست؟ (سراسری ریاضی خارج - ۹۶)

$$x^2 > 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 \quad (۱)$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 24 + 4a(1 - a) < 0 \rightarrow -4a^2 + 4a + 24 < 0 \rightarrow a^2 - a - 6 > 0$$

$$(a - 3)(a + 2) > 0 \quad \begin{array}{c} -2 \quad 3 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline \text{ع} \quad \text{ع} \end{array} \quad (a < -2) \cup (a > 3) \quad (۲)$$

$$\Rightarrow a < -2$$

مثال: اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج تجربی - ۹۵)

$$f \circ g(x) = 2(2x + 1)^2 + 3(2x + 1) + 1 \quad \leftarrow 2x^2 + 3x + 1 \quad (۱)$$

$$= 2(4x^2 + 4x + 1) + 6x + 4 = 8x^2 + 14x + 6 \quad \times$$

$$f \circ g(x) = 2(2x + 1)^2 - 2(2x + 1) + 3 \quad \leftarrow 2x^2 - 2x + 3 \quad (۲)$$

$$= 2(4x^2 + 4x + 1) - 4x - 2 + 3 = 8x^2 + 4x + 3 \quad \times$$

$$f \circ g(x) = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4 \quad \leftarrow 2x^2 - x + 4 \quad (۳)$$

$$= 2(4x^2 + 4x + 1) - 2x + 3 = 8x^2 + 6x + 5 \quad \checkmark$$

$$2x^2 + x + 3 \quad (۴)$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (سراسری تجربی -۹۶)

$$g(f(x)) = \frac{1 - 3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x} + 2} = \frac{1 - \frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x} + 2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{-7x-7}{7} = -x-1$$

توابع و معادلات :

معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

تشکیل معادله درجه دوم و روابط بین ریشه ها:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

مثال: معادله درجه ی دومی تشکیل دهید که ریشه هایش ۴ و ۷ باشد.

$$S = 4 + 7 = 11 \Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$P = 4 \times 7 = 28$$

محاسبه مقادیر بر حسب ریشه ها : (x_1 و x_2 ریشه های معادله هستند).

$$\textcircled{2} \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2PS$$

$$\textcircled{3} \quad (\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 \pm 2\sqrt{x_1x_2} = S \pm 2\sqrt{P}$$

مثال: در معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ اگر α و β ریشه های نامعادله باشند، حاصل $\alpha^2(\beta - 1)$ را بیابید.

$$\beta^2 - 5\beta + 1 = 0 \rightarrow \beta^2 = 5\beta - 1$$

$$\rightarrow \alpha^2(\beta - 1) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1^2 = 1$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 1$$

تشکیل معادله درجه دوم جدید: اگر $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض باشد و بخواهیم معادله درجه دومی بیابیم که ریشه هایش با ریشه های معادله ی اول رابطه ی معینی داشته باشد به روش زیر عمل می کنیم:

ریشه های معادله ی اول را x_1 و x_2 در نظر می گیریم و رابطه ی بین آنها را می نویسیم .

مثال: اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند و مجموعه جواب های معادله ای که به صورت $(\frac{1}{\alpha} + 1)$ و $(\frac{1}{\beta} + 1)$ است. حال معادله را بیابید. (سراسری ریاضی-۹۲)

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$$

برای ریشه های معادله ی جدید

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 \\ &= -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

معادله جدید

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

در گزینه ها $4x^2 - 5x - 1 = 0$

مثال: به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mn^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 &= 6 \\ \rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow (m+3)^2 - 20m > 0$$

$$\rightarrow m^2 + 6m + 9 - 20m > 0 \rightarrow m^2 - 14m + 9 > 0$$

$$\Delta = (14)^2 - 36 = 160 \quad m_1 \text{ و } m_2 = \frac{14 \pm \sqrt{160}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m} \quad \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \quad \frac{7+2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6 \rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است \rightarrow زیرا در این بازه دلتا منفی است \times

$$\left\{ \begin{aligned} m &= 1 \\ m &= \frac{c}{a} = -\frac{9}{5} \quad \checkmark \end{aligned} \right.$$

مثال: اگر α و β ریشه های نامعادله $x(\Delta x + 3) = 2$ باشد، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب

های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

$$\Delta x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{\Delta} \quad S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\frac{9}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{2}{\Delta} \quad P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$$

$$\rightarrow S = \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \rightarrow \boxed{k = 29}$$

تمرین: در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه ی دیگر ۳ واحد بیشتر است.

m کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷) جواب آخر $m = 10$

مثال: در معادله ی $x^2 - 8x + x = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج - ۹۱)

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + 5$$

$$\rightarrow x_2 = 2x_1 - 10 \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 8 = x_1 + 2x_1 - 10 \rightarrow 3x_1 = 18 \rightarrow x_1 = 6 \\ P = x_1 \times x_2 = m = 6 \times (2 \times 6 - 10) = 12 \rightarrow \boxed{m = 12} \end{cases}$$

حل با استفاده از تغییر متغیر:

مثال) مجموع ریشه های حقیقی معادله ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

$$x^2 + x = t \rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 12 \end{cases}$$

$$x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3 - 4 + 2 + 3 = -2$$

مثال: به ازای کدام مقادیر m از معادله ی $m\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل جواب می شود؟ (سراسری تجربی - ۸۸)

$$\rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad \sqrt{x} = t \geq 0$$

$$\rightarrow mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک ریشه مضاعف مثبت}} \Delta = 0 \rightarrow 9 - 4m(m - 2) = 0$$

$$\rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \rightarrow \Delta = 64 + 144 = 208$$

$$-\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \rightarrow m > 0 \rightarrow m_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{208}}{-8} \begin{cases} \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \quad \checkmark \\ \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \quad \times \end{cases}$$

یا دو ریشه مختلف علامت داشته باشد

$$\longrightarrow P = t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m} < 0$$

$$\Rightarrow (0 < m < 2) \cup \left(m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

$$0 < m < 2$$

0	2
+	-
+	+

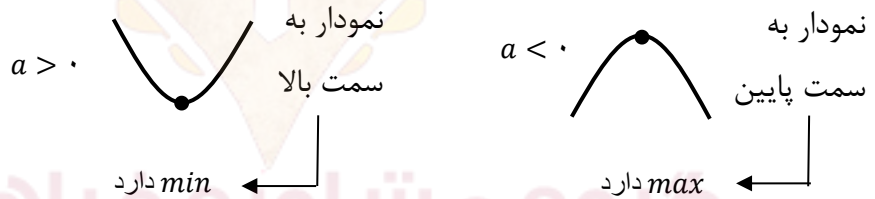
تمرین: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟ (سراسری تجربی خارج - ۸۸)

جواب آخر $1 \leq m < 2$

رسم تابع درجه دوم:

تابع درجه دوم به شکل سهمی می باشد که مختصات راس آن $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

$$ax^2 + bx + c = 0$$



گروه مشاوره فراهوش
 INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB : FARAHOOSH99.IR

$$\text{خط تقارن نمودار } x = -\frac{b}{2a}$$

مثال: به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محور های مختصات نمی گذرد؟ (سراسری ریاضی - ۹۸)

$$a < 0$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+2}{a} < 0$$

-2	0
+	-
+	+

$$-2 < a < 0 \Rightarrow -2 < a < 0$$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه ی اول محور های مختصات نمی گذرد؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

$$(a-3) < 0 \rightarrow a < 3$$

$\Delta > 0$ دو ریشه داشته باشد. \rightarrow حال حالتی نظر در می گیریم که از ناحیه اول بگذرد

$$\rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \rightarrow a > 2 \text{ و } a < -6 \quad (I)$$

$$\begin{array}{c} -6 \quad 2 \\ \hline + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ضرب ریشه ها مثبت: } \frac{-1}{a-3} > 0 \rightarrow a < 3 \quad (II)$$

$$I \cap II \cap III = \Rightarrow 2 < a < 3 \rightarrow$$

$$\text{جمع ریشه ها مثبت: } \frac{-a}{a-3} > 0 \rightarrow 0 < a < 3 \quad (III)$$

$$\rightarrow (a < 3) - (2 < a < 3) \rightarrow a \leq 2$$

سوال انتقال نمودار:

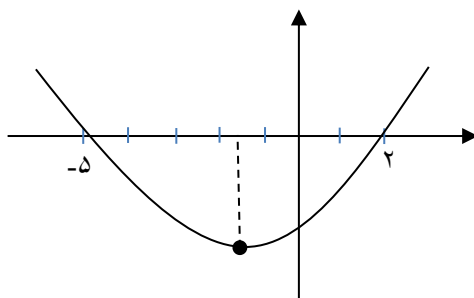
نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه زیر محور x هاست؟

$$(1) (-5 و 2) \quad (2) (3 و -5) \quad (3) (3 و -2) \quad (4) (4 و -2)$$

$$y = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{13}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$y_{\text{جدید}} = \left(x - \frac{1}{2} + 2\right)^2 - \frac{13}{4} - 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0 \leftarrow \text{انتقال}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2} \begin{cases} \rightarrow x = -5 \\ \rightarrow x = 2 \end{cases}$$



گزینه ۱