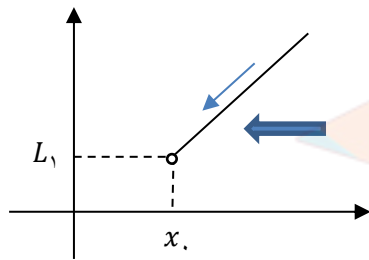
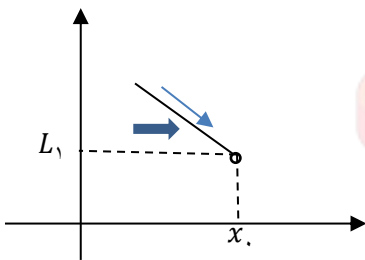


حد و پیوستگی:



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

حد در نقطه: فرض کنید L_1 یک عدد حقیقی باشد: اگر $f(x)$ در مجاورت x_0 به ازای $x > x_0$ تعریف شده باشد به طوری که وقتی x به x_0 میل می کند $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L_1 نزدیک شود، می گوییم حد راست $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می کند L_1 است.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$$

همین تعاریف برای $x < x_0$ حد چپ $f(x)$

تعریف حد: اگر x_0 یک نقطه انتهایی دامنه تابع f نباشد، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ است.

اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ هر دو مساوی و موجود باشند.

- اگر x_0 یک نقطه ابتدایی دامنه ی تابع f باشد در این حالت حد چپ یا راست f در x_0 همان حد تابع f در x_0 است.

قضایای حد: اگر دو تابع f و g روی دامنه ی یکسانی تعریف شده باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \text{ آنگاه:}$$

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

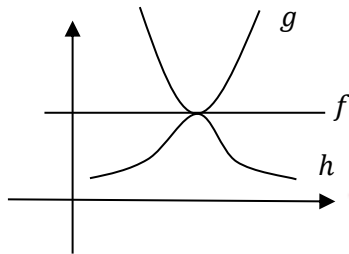
$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$(۳) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$(۴) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = L_3 \neq 0$$

قضیه فشردگی: هرگاه به ازای هر x در بازه y شامل a ، $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{آن گاه}$$

قضیه کران داری: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران دار باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

$$\text{مثال:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0$$

مثال: دو تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد. عدد

حقیقی a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

$$= 2(2+a) - 1(2+a) = 3 \rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \rightarrow a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$$

گروه مشاوره فراهوش

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار a کدام

است؟ (سراسری ریاضی -۸۶)

$$= \left((1)^2 + 2a \right) - (a - 1) = -1 \rightarrow 2a + 1 - a + 1 = -1 \rightarrow a + 2 = -1 \rightarrow a = -3$$

رفع ابهام: استفاده از سه روش حذف عامل صفر شونده، قاعده ی هوییتال و هم ارزی

استفاده از اتحاد ها و تجزیه ها

گویا کردن عبارت های گنگ

- اگر قدر مطلق داشتیم ابتدا آن را تعیین علامت می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{مثال / } \lim_{x \rightarrow a} \frac{a-x}{a-\sqrt{ax}}, \quad a > 0 & \times \frac{a+\sqrt{ax}}{a+\sqrt{ax}} = \frac{(a-x)(a+\sqrt{ax})}{a^2-ax} \\ & = \frac{(a-x)(a+\sqrt{ax})}{a(a-x)} = \frac{a+\sqrt{ax}}{a} = \frac{a+|a|}{a} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{مثال / } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1-\tan x} = \frac{\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{1} = 1$$

روش هوپیتال : هوپیتال یک تابع کسری، کسری است که صورت آن، مشتق صورت و مخرج آن، مشتق مخرج است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{مثال : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2}$$

هم ارزی ها در توابع مثلثاتی:

$a \rightarrow 0$

$a \rightarrow 0$

$a \rightarrow 0$
گروه مشاوره فراهوش
FARA-HOOSH99

$$۱/ \sin a \approx a \quad ۲/ \tan a \approx a \quad ۳/ ۱ - \cos a \approx \frac{a^2}{2}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sin x)}{2x - \sin x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin x}{2x - x} = \frac{\pi x}{x} = \pi$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2x)^2}{x^2} = -2$

مثال: در عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

تعیین علامت صورت: $x^2 - x - 2 = 0$ پس پس صورت کسر برای $x \rightarrow 2^-$ منفی است.

$$a + c = b: \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} -1 \quad 2 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \end{array}$$

گروه مشاوره فراهوش

$x \rightarrow 2^-$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

$x \rightarrow 2^-$



WEB : FARAHOOSH99.IR

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= - \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \\
 &= \frac{-(x^2 - x - 2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{4x^2 - x^2 - 12} \\
 &= \frac{-(x - 2)(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3x^2 - 12} \\
 &= \frac{-(x - 2)(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x^2 - 4)} = \frac{-3 \times 8}{4 \times 3} = -2
 \end{aligned}$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ را بیابید. (سراسری خارج ۹۳)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{|x-2|} \stackrel{hop}{=} \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2}} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} \approx \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{+2 \sin 2x} = \frac{-\sin x}{2 \times 2 \sin x \cos x} \stackrel{x \rightarrow \pi}{=} \frac{1}{4 \cos x} = \frac{1}{4}$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی-۹۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + 2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + 2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + 2x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

سوالات حد:

مثال: حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ کدام است؟ (تجربی-۹۸)

-۶ (۴)

-۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۴ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -8} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{مبهم}} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6x - x^3} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(2x + 10) \sqrt{x^2}}{6x - x^3} = \frac{-6 \times 4}{2} = -12$$

مثال: حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{2x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟ (تجربی خارج-۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{3} (3) (3x+2)^{-\frac{2}{3}}}{1 \cdot x - 18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(1 \cdot x - 18) \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$ کدام است؟ (ریاضی-۹۸)

(۴) $\sin a$ (۳) $\cos a$ (۲) $-\cos a$ (۱) $-\sin a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin a}{x} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x)}{1} = \cos a$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99 (۴) 2π (۳) π (۲) 2 (۱) 1

WEB : FARAHOOSH99.IR

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} \xrightarrow{\text{hop}} \frac{2\pi \cos \pi x \sin \pi x}{-\pi \sin \pi x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -2 \cos \pi x = 2$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3 - \sqrt{x}} - 1}$ کدام است؟ (تجربی-۹۷)

(۴) -72 (۳) -84 (۲) -96 (۱) -112

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{\cdot \text{hop}}{\cdot} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = \frac{14}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{\frac{1}{2}} = -112 \quad \text{گزینه ۱}$$

$$\frac{14}{\frac{1}{2}} = \frac{14 \cdot 2}{1} = 28$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۷)

$$2\sqrt{2} \quad (4) \quad \sqrt{2} \quad (3) \quad -\sqrt{2} \quad (2) \quad -2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = \frac{\cdot}{\cdot}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sqrt{1 + \sin 2x}}$$

$$x \rightarrow \frac{3\pi}{4} \quad \frac{2 \cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$$

$$\text{گزینه } \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{1 - \cos 2t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2t \right)}{\sqrt{1 + \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2t \right)}} = \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{1 - \cos 2t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{2 \sin^2 t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{2} |\sin t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin t \cos t}{-\sqrt{2} \sin t} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{3}{2} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{5}{2} \text{ (۱)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x - 1}{2x - 2} = \frac{-5}{2} \quad \text{گزینه ۱} \end{aligned}$$

تعمیم حد:

حد بی نهایت و حد در بی نهایت:

- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، تابع در $x = a$ دارای حد نامتناهی یا بی کران است و در این نقره حد ندارد. (حد وجود ندارد).

$$f(x) > \cdot \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \cdot \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$f(x) < \cdot \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \cdot \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

اگر r یک عدد گویای مثبت و C یک عدد حقیقی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x^r} = \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty, & a < 0, \quad n \text{ فرد} \\ +\infty, & a > 0, \quad n \text{ زوج} \end{cases}$$

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$: در توابع گویا و کسری: برای رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$ ، در توابع گویا، ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x ، که در مخرج وجود دارد تقسیم می کنیم، سپس با استفاده از $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$ حد ها را می یابیم.

مثال:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 + x - 1}{4x^3 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)} = \frac{3 - 0 + 0 - 0}{4 + 0 + 0} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{n-1} + cx^{m-2} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} \begin{cases} m < n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x'} \\ m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{cases}$$

مثال:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^a - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج-۹۱)

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(x) = \frac{ax^a - 3x + 1}{3x^2 + x} \rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} = \frac{2}{3}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\frac{a}{-1} = 3 \rightarrow a = -3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{hop}} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

$$= \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = 4$$

تمرین ۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

تمرین ۲: حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ (سراسری تجربی خارج ۹۲)

هم ارزی رادیکالی:

$$(1) \quad x \rightarrow \pm\infty \quad \sqrt{x^2 + a} \approx |x|$$

$$(۲) \sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

مثال: در مورد تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟ (تجربی - ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \frac{x^2 - 1}{x - x} = \frac{x^2 - 1}{0} \quad \text{تعریف نشده}$$

مثال: اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج - ۹۸)

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 \left| x + \frac{1}{4} \right|}{x} = \frac{x + 2x + \frac{1}{4}}{x} = 3$$

مثال: در مورد تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ کدام بیان درست است؟ (تجربی خارج - ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} f(x) = +\infty \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} f(x) = -\infty \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi^-}{3}} f(x) = +\infty \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^-}{3}} f(x) = -\infty \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^-}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0} = \text{تعریف نشده}$$

مثال: اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) صفر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + 2 \left| x + \frac{1}{8} \right| = 2x - 2x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + ax + b} = -\infty$$

مخرج کسر باید همواره مثبت و دارای ریشه مضاعف ۲ باشد:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 = x^2 + ax + b \Rightarrow a = -4 \quad b = 4 \rightarrow a + b = 0$$

مثال: دو تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{8}$ ، آنگاه حد $f(x)$ وقتی

$x \rightarrow -1$ کدام است؟ (تجربی-۹۵)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{ax + 2 \left| x + \frac{5}{8} \right|}{2x + 2} = \frac{(2+a)x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2+a}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{hop} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-8}{6}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

تمرین: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{ax^8 + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه

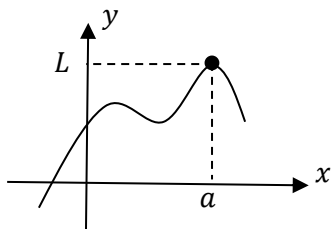
$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟ (تجربی-۹۴)

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

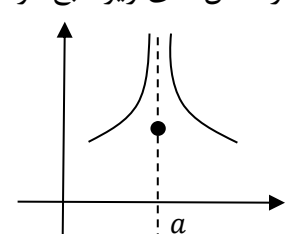
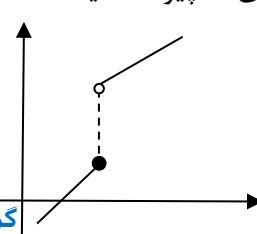
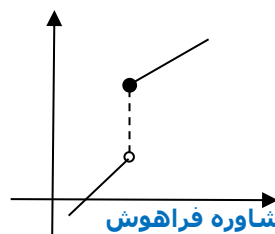
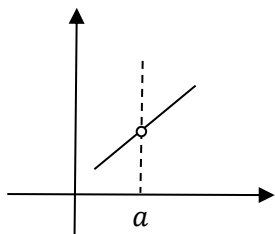
پیوستگی در نقطه: تابع f که در بازه ی I تعریف شده است را در نقطه ی a از دامنه آن پیوسته گویند، هرگاه:

۱- تابع در a حد داشته باشد.

۲- حد تابع در a با مقدار تابع در a برابر باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



در شکل های زیر تابع در نقطه ی a پیوسته نیست.



مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x ; & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) ; & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج-۹۰)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ برای پیوستگی}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) &= a \sin \frac{3\pi}{2} = -a \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1$$

مثال: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 ; & x > 2 \\ ax - 1 ; & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2 - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 1 \Rightarrow 2a - 1 = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار a این رابطه برقرار است.

مثال: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] ; & x < 2 \\ x ; & x = 2 \\ x + 2 ; & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی-۹۲)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 6 - 1 = 5$$

$$f(2) = a \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

پس به ازای $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ هیچ مقدار a تابع پیوسته نیست.

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \rightarrow a = \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \quad \boxed{a = -2\sqrt{2}}$$

تمرین: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & ; \pi < x \leq 2\pi \\ a \cos \frac{2\pi}{3} & ; 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ در نقطه ی $x = \pi$ پیوسته است؟ (سراسری تجربی خارج-۹۳)

$$\sqrt{2} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳) \quad -\sqrt{2} \quad (۲) \quad -2\sqrt{2} \quad (۱)$$

مثال: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه ی $x = -2$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۸)

$$۱۲ \quad (۴) \quad ۶ \quad (۳) \quad -۶ \quad (۲) \quad -۱۲ \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{8+x^3}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{8+x^3}{-x-2} = \frac{0}{0} \text{ hop} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2}{-1} = -12 \quad \text{گزینه 1}$$

$$f(-2) = a = -12 \quad \text{برای پیوستگی چپ}$$

مثال تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2|x-2|} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x = 2$ چگونه است؟ (تجربی)

خارج-۹۸)

(۱) از چپ پیوسته (۲) پیوسته (۳) از چپ و راست ناپیوسته (۴) از راست پیوسته

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{x^2 - 4}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{-2} = -2$$

مثال: به ازای مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی

پیوسته است؟ (ریاضی ۹۸)

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x + 2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = 2a - 1 \Rightarrow 2a - 1 = 4 \rightarrow a = \frac{5}{2} = 2/5$$

مثال: به ازای مقادیری از a و b تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x[x] ; |x| < 1 \\ ax + b ; |x| > 1 \end{cases}$ بر روی R پیوسته

است a کدام است؟ (ریاضی خارج-۹۸)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

-1 (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x[x] ; -1 < x < 1 \\ ax + b ; x > 1 \\ ax + b ; x < -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{برای } x=1} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$= 1(1^-) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad 1$$



برای $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1[-1^+] = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a + b \Rightarrow -a + b =$
 1 2

$$\xrightarrow{1+2} 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \quad a = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳

پیوستگی :

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x > 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟ (تجربی - ۹۷)

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a + 2^0 = 3a + 1 \Rightarrow 3a + 1 = 2a \rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a \log_2 4 = 2a$$

$$f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + 0/5 = -1/5$$

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ (تجربی - ۹۶)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{hop} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{1-x} = 2$$

$$f(0) = a = 2$$

مثال: به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$

پیوسته است؟ (تجربی-۹۵)

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{(\cos x - \sqrt{\cos x})}{\sin^2 x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x - |\cos x|}{(1 - \cos^2 x)(\cos x + \sqrt{\cos x})} = \frac{\cos x (\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2(1 + \cos x)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{4} \quad f(0) = -\frac{1}{4}$$

تمرین: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x-[x]}{x^3-x-6} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در بازه ی $(2, 3]$ پیوسته است؟ (ریاضی-۹۷)

(۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

تمرین: به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی

مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱، پیوسته است؟ (تجربی-۹۴)

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR