

جزوه مثلثات:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

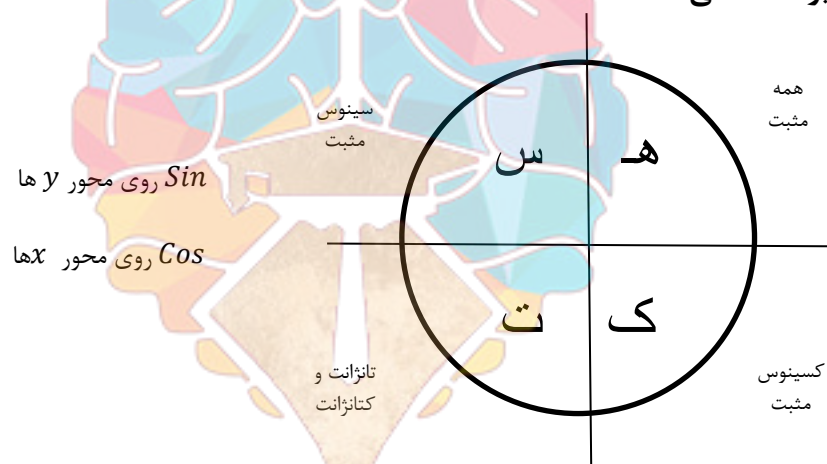
رابطه بین درجه و رادیان

$$L = r\theta$$

طول کمان ←
شعاع دایره ↓

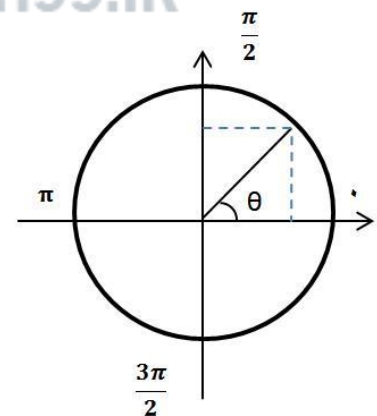
طول یک کمان در دایره

دایره مثلثاتی:



گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot \theta$	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۰	ت ن	۰	ت ن



تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا :

$$(\pi + \alpha) \text{ کمان} : \begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$(\pi - \alpha) \text{ کمان} : \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$(-a) \text{ یا } (2\pi - a) \text{ کمان} : \begin{cases} \cos(-a) = \cos a \\ \sin(-a) = -\sin a \end{cases} \Rightarrow \tan(-a) = -\tan a$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \text{ کمان} : \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

$$\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) \text{ کمان} : \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cos a \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = \sin a \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

$$\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \text{ کمان} : \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\sin a \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

گروه مشاوران فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

در صورتی که نسبت مثلثاتی شامل ضرایب زوج π باشد آن را حذف می کنیم :

مثال : $\sin(10\pi + \alpha) = \sin \alpha$

مثال : $\cos(10\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

در صورتی که نسبت مثلثاتی شامل ضرایب فرد π باشد آن را به π تبدیل می کنیم :

مثال : $\sin(9\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

مثال : $\cos(9\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

مثال : اگر $\tan \alpha = 0/2$ باشد مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 0/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{0/4} = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

روابط مثلثاتی :

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

فرمول های جمع و تفریق دو کمان :

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی-۹۳)

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow 2 \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

مثال: اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ آنگاه مقدار $\tan(2\alpha - \beta)$ را حساب کنید. (سراسری تجربی)

خارج ۹۳

$$\frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{3}{3}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{13}{9}} = \frac{9}{13}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 105}$ با فرض $\tan 15 = \frac{1}{2}$ (سراسری تجربی ۹۴)

$$\frac{\cos(270+15) - \sin(270-15)}{\sin(540-15) - \sin(90+15)} = \frac{\sin 15 - (-\cos 15)}{\sin 15 - \cos 15} = \frac{\sin 15 + \cos 15}{\sin 15 - \cos 15} \times \frac{\frac{1}{\cos 15}}{\frac{1}{\cos 15}} = \frac{\tan 15 + 1}{\tan 15 - 1} = -\frac{16}{9}$$

مثال : اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ، $\sin 2\alpha$ چقدر است؟ (سراسری ۹۴)

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\frac{\tan \alpha - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \tan \alpha} = 1 \rightarrow \tan \alpha - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \tan \alpha \rightarrow \frac{1}{2} \tan \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \tan \alpha = 3$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{6}{10} = 0.6$$

مثال : اگر $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد ، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است ؟ (تجربی ۹۸)

$$\sin x \quad (۱) \quad \cos x \quad (۲) \quad -\sin x \quad (۳) \quad -\cos x \quad (۴)$$

راه حل اول (قرارداد $\frac{4\pi}{3}$ در صورت سوال

فقط گزینه ۴ با قرار دادن $\frac{4\pi}{3}$ به جواب $\frac{1}{2}$ میرسد

$$\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

$$-\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

گروه مشاوره فراهوش (راه تشریحی)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

$$\left. \begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 - \sin^2 x &= \cos^2 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} (1 - \sin^2 x)} = \left| \frac{1}{\cos x} \right| (\cos^2 x)$$

$$= \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

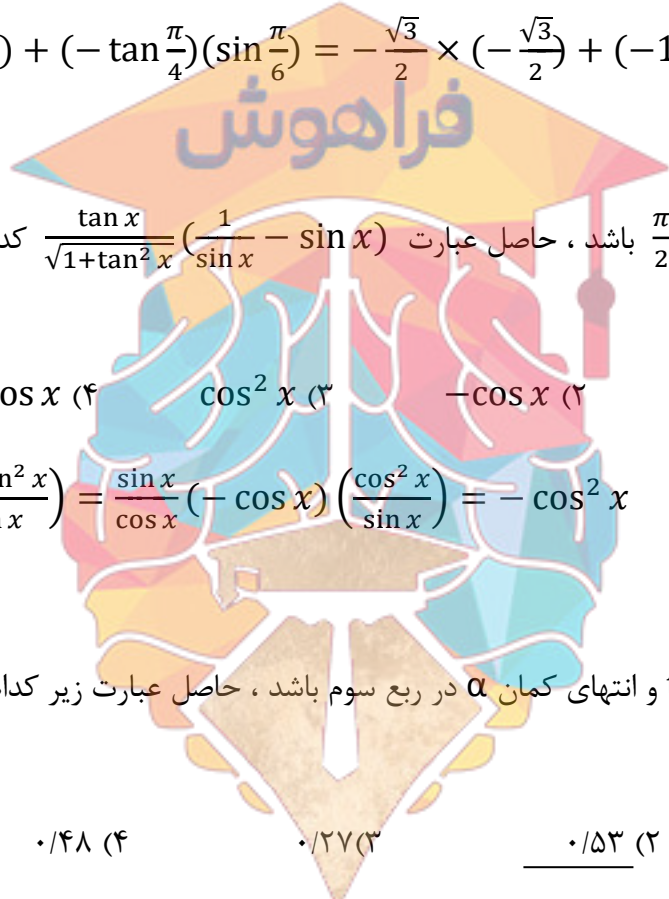
$\cos x$ در ناحیه سوم مثلثاتی منفی است پس عبارت داخل قدر مطلق به صورت قرینه بیرون می آید.

مثال : حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است ؟ (تجربی ۹۸)

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \qquad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \qquad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \qquad -\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

$$\sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(-\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\tan\frac{\pi}{4}\right) \left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



مثال: اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\cos x \text{ (۴)} \qquad \cos^2 x \text{ (۳)} \qquad -\cos x \text{ (۲)} \qquad -\cos^2 x \text{ (۱)}$$

$$\tan x |\cos x| \left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} (-\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = -\cos^2 x$$

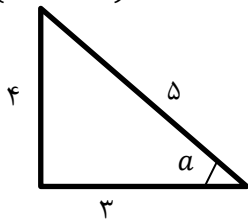
مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$-\frac{1}{23} \text{ (۱)} \qquad \frac{0}{53} \text{ (۲)} \qquad \frac{0}{27} \text{ (۳)} \qquad \frac{0}{48} \text{ (۴)}$$

گروه مشاوره فراہوش

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha (-\sin \alpha) + \cot \alpha = -\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{27}{100}$$

گزینه ۳



$$\sin \alpha = \frac{-4}{5} \qquad \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$

تمرین: حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos$ — کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

تمرین : حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است ؟ (ریاضی خارج ۹۸)

$$\sqrt{3} \text{ (۴)} \quad ۱ \text{ (۳)} \quad \text{صفر (۲)} \quad -۱ \text{ (۱)}$$

مثال : اگر $\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = 2$ باشد ، $\tan x$ کدام است ؟ (تجربی ۹۸)

$$۳ \text{ (۴)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad -۳ \text{ (۱)}$$

$$\frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} = 2 \rightarrow \sin x - \cos x = 2 \sin x + 2 \cos x$$

=

$$\rightarrow \sin x = -3 \cos x \rightarrow \underline{\tan x = -3}$$

مثال : اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است ؟ (تجربی ۹۶)

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{3} \text{ (۳)} \quad -\frac{3}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3} \rightarrow 6 \tan \frac{x}{2} = 4 - 4 \tan^2 \frac{x}{2} \xrightarrow{\tan x = m} 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$\Delta = 36 + 64 = 100 \rightarrow \frac{6 \pm 10}{8} \begin{matrix} \rightarrow -2 \\ \rightarrow \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad \cot \frac{x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال : حاصل $\sin(\frac{\pi}{3} + \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ کدام است ؟ (ریاضی ۹۶)

$$\text{صفر (۴)} \quad ۱ \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \pi = 0 \quad \text{گزینه 4}$$

تمرین : $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد ، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است ؟ (تجربی ۹۵)

$$-\frac{3}{4} \quad (۱) \quad -\frac{3}{8} \quad (۲) \quad \frac{3}{8} \quad (۳) \quad \frac{3}{4} \quad (۴)$$

نمودار توابع مثلثاتی : دوره تناوب توابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ و دوره تناوب توابع $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ ، $T = \frac{\pi}{|a|}$ است .

۱. اگر $b > 0$ تابع به سمت راست و اگر $b < 0$ به سمت چپ به اندازه b واحد انتقال می یابد.

۲. اگر $|a| > 1$ در راستای محور y ها کشیده می شود و اگر $|a| < 1$ در راستای محور y ها جمع می شود.

۳. اگر $C > 0$ تابع به بالا و اگر $C < 0$ تابع به پایین منتقل می شود.

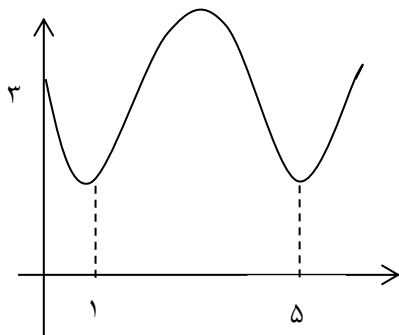
۴. دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{k}$ است.

۵. تابع در بازه $\left[b, b + \frac{2\pi}{k}\right]$ یک شکل کامل را ظاهر می کند.

گروه مشاوره فراهوش
 INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال (شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه

$$y = \frac{25}{3} \quad \text{؟ (تجربی ۹۳)}$$



۱. ۲

۲. ۲/۵

۳. ۳

۴. ۳/۵

نقطه (۳ و ۰) روی نمودار:

$$3 = a + \sin(0) \rightarrow a = 3$$



گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

دوره تناوب تابع : $T = 5 - 1 = 4$

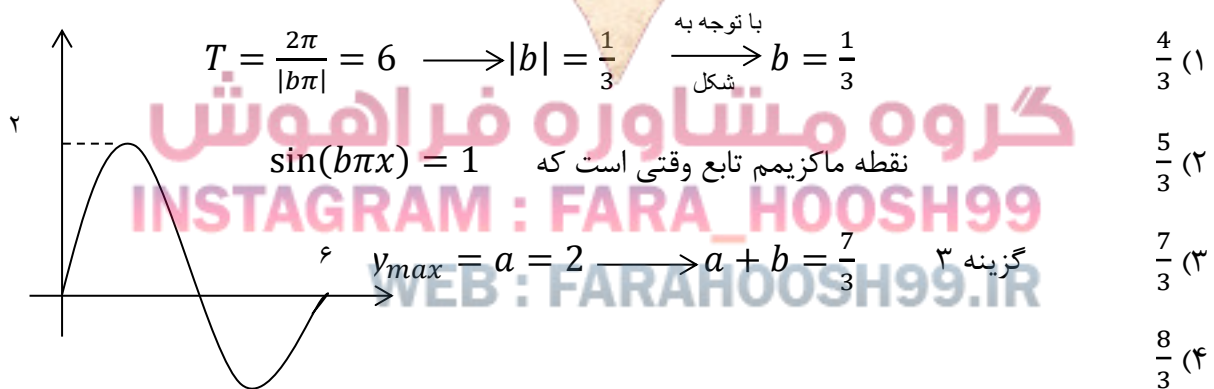
$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \rightarrow 2\pi = 4\pi|b| \rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \times \\ b = -\frac{1}{2} \sqrt \end{cases}$$

به توجه به شکل $b = \frac{1}{2}$ قابل قبول نیست $b = \frac{1}{2} : f(x) = 3 + \sin \frac{\pi}{2} x \xrightarrow{x=1} f(1) = 3 + \sin \frac{\pi}{2} = 4$

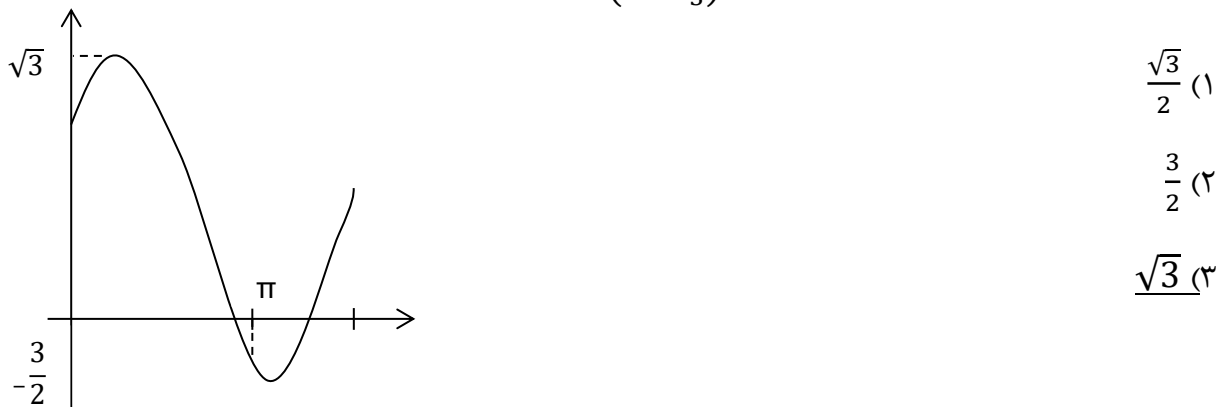
$$\begin{aligned} b = -\frac{1}{2} : f(x) &= 3 + \sin \left(-\frac{\pi}{2} x \right) = 3 - \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \xrightarrow{x=\frac{25}{3}} f \left(\frac{25}{3} \right) \\ &= 3 - \sin \left(\frac{25\pi}{6} \right) = 3 - \sin \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \quad \text{گزینه 2} \end{aligned}$$

مثال : شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است . $a + b$ کدام است ؟ (تجربی)

خارج ۹۳



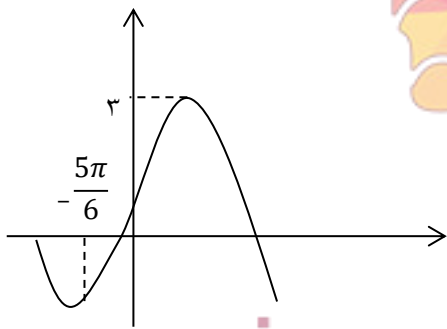
مثال : شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ است . b کدام است ؟ (تجربی ۹۸)



$$-\frac{3}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ y_{\max} = \sqrt{3} = a + b \end{cases} \Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \rightarrow b \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2} \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

مثال : شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ است ، مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است ؟ (تجربی خارج ۹۸)



۱/۵ (۱)

۲ (۲)

۲/۱ (۳)

۱ + √۳ (۴)

$$y = a + b \sin x \quad \text{قرار دادن } \left(0 \text{ و } -\frac{5\pi}{6}\right) :$$

$$0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3b}{2} = 3 \rightarrow b = 2$$

$$y_{\max} = a + b = 3$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \rightarrow a = 1 \\ \leftarrow b = 2 \end{array}$$

$$y = 1 + 2 \sin x = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2$$

گزینه ۲

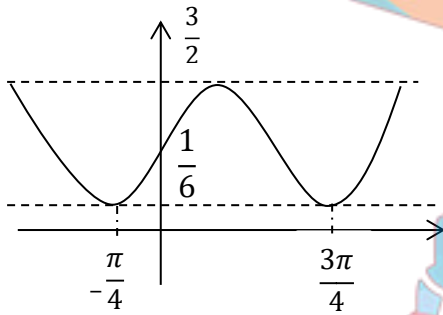
مثال : شکل رو به رو ، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است . $a + b$ کدام است ؟ (ریاضی ۹۸)

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)



$$y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

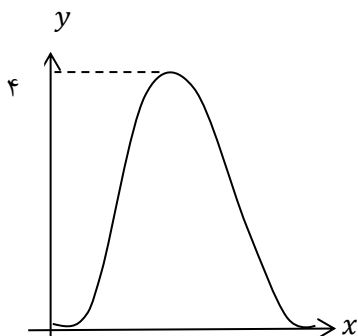
$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

$$y_{max} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{a}{2} \rightarrow a = 1$$

مثال : شکل زیر تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است . b کدام است
در نقطه 2 مقدار تابع max است

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR



۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

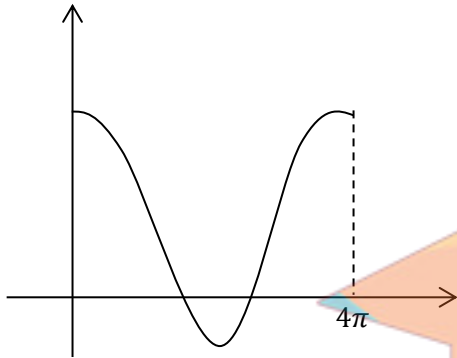
-۲ (۱)

$$0 = a + b \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -2$$

$$4 = a - b$$

مثال: شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $Y = \frac{1}{2} + 2 \cos mn$ است، مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

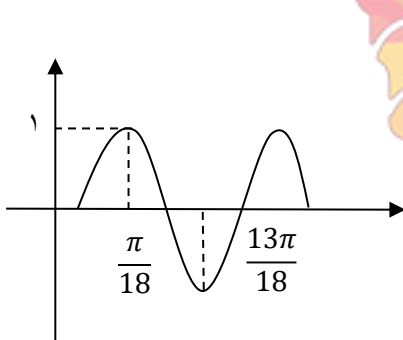
- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر



دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi$ $|m| = \frac{1}{2}$ $m = \pm \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

تمرین: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos \left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است (ریاضی ۹۵)

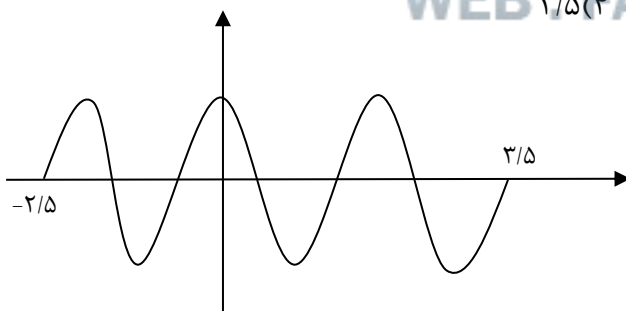


- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

تمرین: شکل رو به رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx\right)$ است. a, b کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR



مثال: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

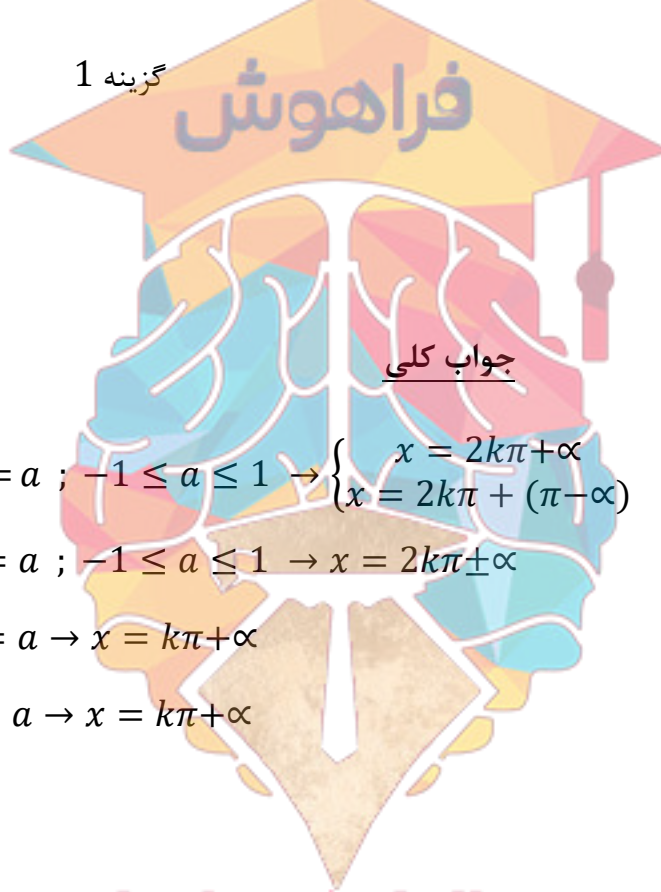
$$2 \quad (3)$$

$$\pi \quad (4)$$

$$f(x) = \tan \pi x - \frac{1}{\tan \pi x} = \frac{\tan^2 \pi x - 1}{\tan \pi x}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \text{ با استفاده از رابطه } \rightarrow f(x) = -\frac{2}{\tan 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{|2\pi|} = \frac{1}{2} \quad \text{گزینه 1}$$



معادلات مثلثاتی:

شکل معادله

جواب کلی

$$\sin x = \sin \alpha = a ; -1 \leq a \leq 1 \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha = a ; -1 \leq a \leq 1 \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan x = \tan \alpha = a \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha = a \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالات خاص:

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \tan x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \quad \cot x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

مثال: مجموعه جواب معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(تجربی ۹۸)

$$5\pi \quad (4)$$

$$4\pi \quad (3)$$

$$3\pi \quad (2)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (1)$$

$$4 \sin x (-\cos x) = 1$$

$$\rightarrow -4\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} + \frac{60\pi}{12} = 5\pi \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \rightarrow \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x = 0$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad (۱) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x$$

$$= \cos(\pi - x) \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: مجموعه جواب های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

$$3\pi \quad (۴) \quad \pi \quad (۳) \quad \frac{7\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{5\pi}{12} \quad (۱)$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \rightarrow x = 0, 2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

گزینه 2

مثال: مجموعه جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی خارج - ۹۸)

فراهموش

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 4π

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x} 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sin^2 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \pm 1 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

گزینه 4

$$\rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \rightarrow 4\pi$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه 4

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $(2k + 1)\frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{6}$

گروه مشاوره فراهموش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

$$(2 \sin x \cos x)(2 \sin 2x \cos 2x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\rightarrow (2 \sin x \cos x)(4 \sin x \cos x \cos^2 x) = \cos^2 x$$

$$8 \sin^2 x \cos^2 x \cos 2x = \cos^2 x \rightarrow 8 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \cos 2x = 1$$

$$\rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos^2 2x = 1 \rightarrow 4 \cos^2 2x - 4 \cos 2x + 1 = 0 \rightarrow (2 \cos 2x - 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos 2x - 1 = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (I)}$$

$$\rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (II)}$$

$$\text{II} \cup \text{I} \Rightarrow (2k + 1) \frac{\pi}{6}$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۴)}$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۳)}$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ (۲)}$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۱)}$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

اجتماع جواب ها

$$\rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

سوال معادله مثلثاتی:

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

$$\frac{k\pi}{3} \text{ (۴)}$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ (۲)}$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ (۱)}$$

تمرین: جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ (۴)}$$

$$2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \text{ (۳)}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ (۲)}$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ (۱)}$$



گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_H00SH99
WEB : FARAHOOSH99.IR