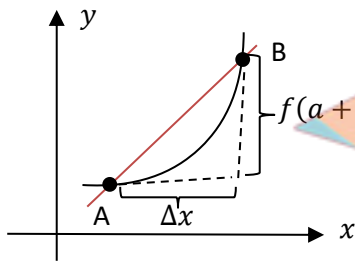


مشتق

تعریف مشتق و مشتق پذیری:



$$A \mid \begin{matrix} a \\ f(x) \end{matrix} \quad B \mid \begin{matrix} a + \Delta x \\ f(a + \Delta x) \end{matrix}$$

$$m_A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

هر گاه در تابع f بر بازه I باز شامل نقطه a تعریف شده باشد و حد ذکر شده موجود باشد آنگاه خط گذرنده بر نقطه $A(a, f(a))$ ، شیب m_A را خط مماس بر تابع f در نقطه A می نامیم.

- آهنگ متوسط تغییر و آهنگ آنی (لحظه ای) تغییر:

آهنگ متوسط تغییر تابعی مانند $y = f(x)$ روی بازه ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

آهنگ لحظه ای تغییر f در x برابر است با: آهنگ متوسط تغییر $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ یا

$$\text{آهنگ متوسط تغییر } f \text{ در بازه } [x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تعریف مشتق: اگر تابعی باشد که در همسایگی نقطه a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نشان می دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- اگر حد بالا موجود نباشد، گوییم تابع f در a مشتق پذیر نیست.

مشتق های یک طرفه:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق راست f

مشتق چپ f

مشتق پذیری و پیوستگی:

اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

- اگر مشتق های چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه مشتق پذیر است

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & ; x > 1 \\ x + b & ; x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، a و b را بیابید.

شرط پیوستگی: $a + 1 = 1 + b \rightarrow a = b$

شرط وجود مشتق: $f'(x) = \begin{cases} 2ax & ; x > 1 \\ 1 & ; x < 1 \end{cases} \rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

مشتق گیری و قضایا:

قواعد مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم مشتق توابع

تابع	مشتق تابع
$y = cf(x)$	$y' = cf'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) - g(x)$	$y' = f'(x) - g'(x)$
$y = (f \cdot g)(x)$	$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

قاعده زنجیری:

$$1/ (fog)'(x_0) = g'(x_0) \times f'(g(x_0))$$

$$2/ y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

$$3/ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{یا} \quad 4/ y'_x = u'_x \times y'_u$$

مثال: اگر $f'(2) = 5$ و $g(0) = 2$ و $g'(0) = 7$ ، آنگاه $(fog)'(0)$ را بیابید.

$$(fog)'(0) = g'(0) \times f'(g(0)) = g'(0) \times f'(2) = 7 \times 5 = 35$$

جدول مشتق گیری توابع:

تابع	مشتق	مثال
$y = u^n$	$y' = nu' \times u^{n-1}$	$y = (x^2 + x)^3 \rightarrow y' = 3(2x + 1)(x^2 + x)^2$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^3 + 5} \rightarrow y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2 + 5}}$
$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2} \rightarrow y' = \frac{2(2x - 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^1}}$
$y = \sin u$	$y' = -u' \cos u$	$y = \sin(x^2 + 1) \rightarrow y' = 2x \cos(x^2 + 1)$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \cos \sqrt{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$
$y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan(\sin x) \rightarrow y' = \cos x (1 + \tan^2(\sin x))$

مثال: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

$$f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x} \rightarrow f(x) = (x + 1)(x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$$

$$\rightarrow f'(-1) = (x - 2)^3 \sqrt[3]{x^2 - 7x} \rightarrow f'(-1) = -3 \times \sqrt[3]{8} = -6$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ و $x = 12$ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{(25)^{-\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$$

آهنگ لحظه ای تغییر تابع در $x = 4$ برابر $f'(4)$ است، پس:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2 \times (2x + 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x + 1)^3}} \xrightarrow{x=4} f'(4) = -\frac{1}{27}$$

$$-\frac{1}{60} - \frac{-1}{27} = \frac{-9 + 20}{540} = \frac{11}{540}$$

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر کمتر است؟ (سراسری تجربی خارج-۹۳)

$$\frac{1}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{72} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{18} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{36} \text{ (۱)}$$

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos 2x & ; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی-۹۳)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

بررسی شرط پیوستگی

$$: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \cos^2 x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow a + b \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \tan x + b \sin 2x = a(1) + b(1) = a + b \\ = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بررسی شرط مشتق پذیری $f'(x)$

$$= \begin{cases} 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \\ a(1 + \tan 2x) + 2b \cos 2x ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2a \end{cases} \rightarrow$$

$$2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$a + b = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow b = -1$$

تمرین: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه ی $x = 1$ مشتق پذیر است b

کدام است؟ (سراسری تجربی خارج - ۹۳)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

۴ (۴)

WEB : FARAHOOSH99.IR

۱ (۱)

مثال: مشتق تابع $y = 2\sin^2 x \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

$$\begin{aligned} y' &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

تمرین: مشتق $y = \ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر آن است؟ (سراسری تجربی خارج- ۹۲)

$$y = \ln e^{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x} \ln e = \sqrt{\sin x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \rightarrow y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} \rightarrow y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

تمرین: مقدار مشتق $\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

- (۴) $\frac{8}{9}$
 (۳) $\frac{7}{9}$
 (۲) $\frac{5}{9}$
 (۱) $\frac{4}{9}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f \circ g)'(x)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

$$f(g(x)) = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} \rightarrow f(g(x))' = \frac{x-x+3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

- (۴) $\frac{5}{6}$
 (۳) $\frac{7}{12}$
 (۲) $\frac{5}{12}$
 (۱) $\frac{4}{9}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(5-2x) + 2(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) + 2(3)}{9} = \frac{\frac{21}{4}}{9} = \frac{7}{12}$$

گزینه ۳

فراهوش

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + ax + b = -4 + 2a + b$

$\rightarrow -4 + 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = 5$

مشتق پذیری: $f'(x)$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & x > 2 \\ -2x + a & x < 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} f'_+(2) = -1 & f'_-(2) = -4 + a \\ \rightarrow -4 + a = -1 & \rightarrow a = 3 & b = -1 \end{matrix}$$

گروه مشاوره فراهوش

گزینه ۲

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= g'(x)f'(g(x)) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} f'(g(x)) \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} f'(g(x)) \rightarrow (f \circ g)'(2) = -\frac{3}{1} \times f'\left(\frac{4+1}{1}\right) \\ &= -3f'(4) = 6 \rightarrow f'(5) = -3 \end{aligned}$$

گزینه ۱

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه ای در $x = 2$ ، از آهنگ متوسط در بازه ی $[1, 4]$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۰/۷۵ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

آهنگ متوسط:
$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times 16 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{3} = \frac{\left(8 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{33}{4}}{3} = \frac{11}{4}$$

آهنگ لحظه ای: $f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0/5$

گزینه ۲

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{4}} = 2$$

گزینه ۳

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: اگر تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x < 2 \end{cases}$ ، $f'(2)$ موجود باشد، a کدام

است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پیوستگی:
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{ax+b} = \frac{8}{2a+b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x^3 + 6x = -8 + 12 = 4 \rightarrow \frac{8}{2a+b} = 4 \rightarrow 2a+b = 2$$

$$\text{مشتق پذیری: } f(x) = \begin{cases} \frac{-a(8)}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x < 2 \end{cases} \quad f'_+(2) = \frac{-8a}{(2a+b)^2} = -\frac{8a}{4}$$

$$f'_-(2) = -12 + 6 = -6$$

$$\Rightarrow -2a = -6 \rightarrow a = 3$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^3 \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{2}} (x)$$

$$\rightarrow f'(-3) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{1} \times (8)^{-\frac{2}{3}} \times (-3) \rightarrow f'(-3) = 2 - 5 \times \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}$$

$$= 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال: مشتق عبارت $\sin^4 x + \cos^4 x$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99 (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

$$f'(x) = 4 \cos x \sin^3 x - 4 \sin x \cos^3 x$$

$$= -4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x$$

$$= -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

مثال: اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq 2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$

کدام است؟ (تجربی ۹۷)

- (۱) -3 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

پیوستگی : $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4a - 2b + 4$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \Rightarrow 4a - 2b + 4 = -6 \rightarrow 2a - b = -5$
 1

مشتق پذیری : $f'(x)$
 $= \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ 3x^2 - 1 & x < -2 \end{cases} \begin{matrix} f'_+(-2) = -4a + b \\ f'_-(-2) = 11 \end{matrix} \Rightarrow -4a + b = 11$

$1, 2 \Rightarrow -2a = 6 \rightarrow a = -3 \rightarrow b = -11$

$f(1) = a + b + 4 = 0$ گزینه 2

مثال: اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})f'(g(x))$

$(f \circ g)'(1) = (1 + \frac{1}{2})f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$ گزینه 3

گروه مشاوره فراهوش
 INSTAGRAM: FARA_HOOSH99
 WEB: FARAHOOSH99.IR

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| ; & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b ; & x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است.

$a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(I) $x^2 - 2x = x(x - 2) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & \\ + & - & + \end{array}$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$$

II پیوستگی : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 2x = -4 + 4 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \Rightarrow 2 + 2a + b = 0$
 $\rightarrow 2a + b = -2$

مشتق پذیری : $f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & ; x < 2 & f'_-(2) = -2 \\ x + a & ; x \geq 2 & f'_+(2) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow a = -4 \rightarrow b = 6$
 $\rightarrow a + b = 2$ گزینه 1

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$ آهنگ متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چقدر بیشتر است؟ (ریاضی ۹۸)

۰/۲۵ (۴) ۰/۲ (۳) ۰/۱۵ (۲) ۰/۱ (۱)

آهنگ متوسط : $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$

آهنگ لحظه ای : $f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{2}{2} \left(\frac{11}{4}\right) = \frac{19}{4} \Rightarrow$

$5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4} = 0/25$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: خط به معادله ی $y = 3x - 5$ در نقطه ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد ، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = \frac{2}{3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{4}{3} = f'(1)$

شیب خط y : $g'(2) = 3$

$$g(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 3 \times f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

تمرین: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x = \frac{3}{2}$ چقدر کمتر است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

(۱) 0.03 (۲) 0.04 (۳) 0.05 (۴) 0.06

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + |x|} - [x]$ باشد، آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام اسن؟ (ریاضی ۹۷)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

$$f(x)_{x \rightarrow 1^+} = \sqrt{x^2 + x} - 1$$

$$f'_+(1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

گروه مشاوره فراهوش

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

مثال: مشتق تابع $y = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f'(x) = 2 \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = -\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر $0/21$ از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه چقدر کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)

تمرین: تابع $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

مشتق ندارد. (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تمرین: تابع $f: R \rightarrow R$ در R مشتق پذیر از مرتبه ی دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4 - x^2)$ است. اگر $f^{-1}(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

معادله خط مماس و قائم از نقطه ی روی منحنی :

معادله خط مماس بر تابع مشتق پذیر f در نقطه ی $M(x_0, f(x_0))$ واقع بر آن ، با ضریب زاویه $m = f'(x_0)$ برابر است با:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

مثال: معادله خط مماس بر تابع $y = x^2 - x$ در نقطه ای به طول $x = 1$ ، واقع بر آن بیابید.

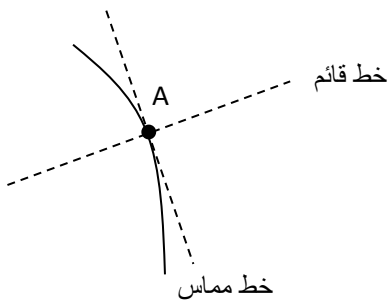
$$y = (1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{نقطه} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad y = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} f'(1) = x = 1 \rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

فراهوش

معادله ی خط قائم:

معادله خط قائم بر تابع مشتق پذیر f در نقطه ی $A(x_0, f(x_0))$ واقع بر آن به صورت زیر است:



$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

مثال: معادله ی خط قائم بر تابع $y = x^3$ در نقطه ی $(1, 1)$ واقع بر آن عبارتست از:

$$y' = 3x^2 \rightarrow m = y'(1) = 3$$

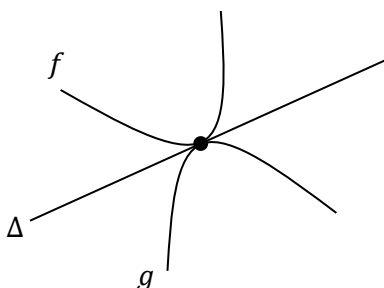
زاویه بین دو منحنی یا یک خط و یک منحنی:

$$\tan w = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

مماس بودن یک خط بر یک منحنی یا دو منحنی بر هم:



$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه $[0 و 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره خط است که ابتدا انتهای منحنی را به هم وصل می کند. این خط مماس محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟ (تجربی خارج -۹۸)

فرا هوش

(۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) -۱ (۴) -۰/۵

$$f(0) = -5 \quad f(8) = 3$$

$$m = \frac{3 - (-5)}{8 - 0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-5)}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 9 \rightarrow |x+1| = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & \checkmark \\ x = -4 & \times \end{cases}$$

$$f(2) = \frac{3}{3} = 1 \quad m = 1 \xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y - 1 = 1(x - 2) \rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{x=0} y = -1$$

گروه مشاوره فرا هوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR