

هندسه تحلیلی و مقطع مخروطی:

- فاصله ی دو نقطه $A|_{y_1}^{x_1}$ و $B|_{y_2}^{x_2}$ از همدیگر: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- بدست آوردن شیب خط با دو نقطه $A|_{y_1}^{x_1}$ و $B|_{y_2}^{x_2}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan x \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

- به دست آوردن شیب خط از روی معادله خط: $Ax + Bx + C = 0$

$$\rightarrow By = -Ax - C \rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$m_{\text{شیب خط}} = -\frac{A}{B} \quad \left(\frac{C}{B} \text{ عرض از مبدا (h)} \right)$$

$$y = mx + h$$

- مقایسه دو خط با هم:

معادله باز	معادله استاندارد
$ax + by + c = 0$ و $a'x + b'x + c' = 0$	$y = mx + b$, $y = m'x + h'$
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دو خط موازی	$m = m'$ و $h \neq h'$ دو خط موازی
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ دو خط منطبق	$m = m'$ و $h = h'$ دو خط منطبق
$aa' + bb' = 0$ دو خط عمود به هم	$mm' = -1$ دو خط عمود به هم

- فاصله نقطه ی $A|_{y_A}^{x_A}$ از خط $ax + by + c = 0$:

$$AH = d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از همدیگر:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی ۹۲)

(۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

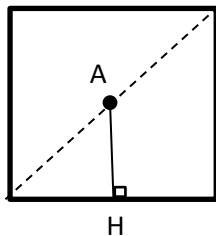
$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \text{ دو خط موازی}$$

اندازه ضلع مربع = فاصله دو خط موازی = $\frac{|-3 - 2|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

مربع $S = 5 \frac{\sqrt{2}}{4} \times 5 \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$

مثال: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق به خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

(۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰



فاصله نقطه A خط از $2y - x - 5 = 0$: $AH = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

مربع ضلع مربع = مربع AH برابر $2 = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

مربع $S = 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 80$ گزینه ۴

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی:

۳ حالت جواب)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دو خط متقاطع \rightarrow (1) یک جواب اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد

دو خط موازی و غیر منطبق \rightarrow (2) جواب ندارد اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد.

دو خط منطبق \rightarrow (3) بی شمار جواب اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد.

فرا هوش

مثال: به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات

$$\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3m + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$$
 دارای بی شمار جواب است؟ (تجربی ۹۳)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m}$$

$$m(m-2) = 3 \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \quad \checkmark \\ m = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = 1 = -1 \quad \times \end{cases} \quad \text{گزینه 2}$$

مثال: قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط d می نامیم. عرض از مبدا خط d کدام است؟ (تجربی ۹۷)

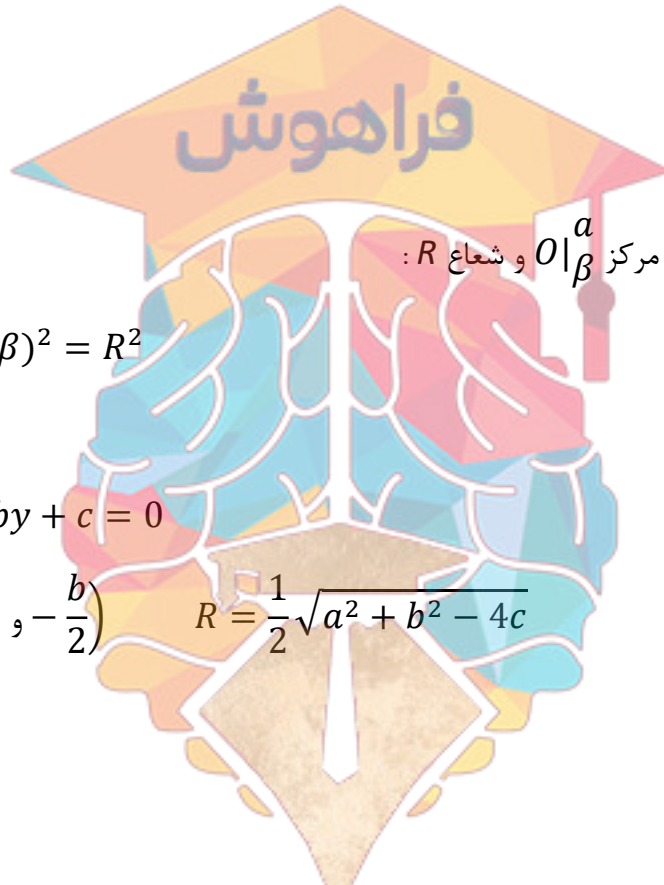
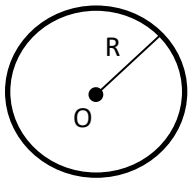
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB: FARAHOOSH99.IR
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

عرض از مبدا خط d با طول از مبدا قرینه آن برابر است :

$$y = 0 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$$

دایره:

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت مانند O در آن صفحه ، که آن را مرکز می نامیم ، مقدار مثبت ثابتی باشد. این مقدار ثابت شعاع دایره است و معمولا با R نمایش داده می شود.



معادله استاندارد دایره به مرکز $O(a, \beta)$ و شعاع R :

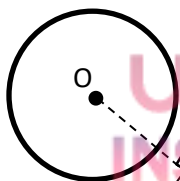
$$(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

معادله گسترده دایره:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\rightarrow \text{مرکز دایره } \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

اوضاع خط و دایره:



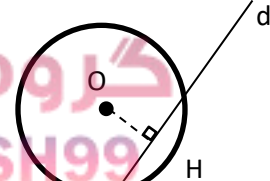
$$OH > R$$

خط دایره را قطع نکرده است.



$$OH = R$$

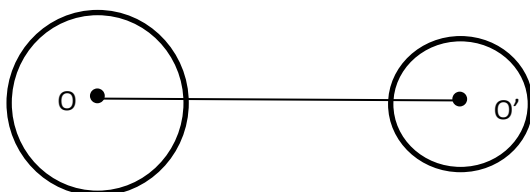
خط مماس به دایره.



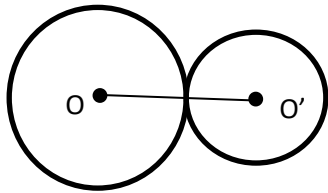
$$OH < R$$

خط و دایره متقاطع .

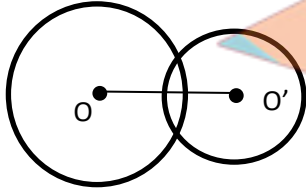
اوضاع نسبی دو دایره:



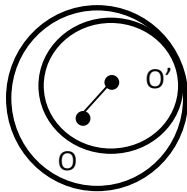
$$d > r + r' \text{ (متخارج) هم بیرون بیرون}$$



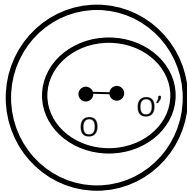
دو دایره مماس بیرون $d = r + r'$



دو دایره متقاطع $r - r' < d < r + r'$



دو دایره مماس درون $d = r - r'$



دو دایره متداخل $d > r - r'$



دو دایره هم مرکز $d = 0$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

مثال: شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, -2)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۳)

$\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۱)

روی معادله دایره $(0,0)$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2,1)} 5 + 2a + b = 0 &\rightarrow 2a + b = -5 \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = 10 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = 5 \rightarrow b \\ \xrightarrow{(1,-2)} 5 + a - 2b = 0 &\rightarrow a - 2b = -5 \\ &= 1 \rightarrow a = -3 \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 1 - 0} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \quad \text{گزینه 1}$$

تمرین: شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات $(2,1)$, $(-2,4)$ و $(0,0)$ می گذرد کدام است؟
(تجربی ۹۱)

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

مثال: شعاع دایره ای به مرکز $(2, -2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟ (تجربی خارج -۹۳)

۴ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۴)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

$$o\left(\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) \rightarrow o(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2$$

$$\text{فاصله مرکز دو دایره} : oo' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

$$oo' = R = R' \rightarrow 5 = 2 = R' \rightarrow R' = 3 \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: نقطه ی $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول قطع می کند؟ (تجربی خارج ۹۸)

$-1 \pm \sqrt{3}$ (۴)

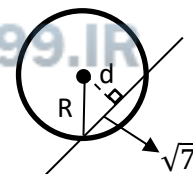
$-1 \pm \sqrt{2}$ (۳)

۲ و -۴ (۲)

۳ و -۵ (۱)

$$\text{فاصله مرکز دایره از خط} : \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$R^2 = d^2 + (\sqrt{7})^2 = 13 + 7 = 20 \rightarrow R = 2\sqrt{5}$$



$$\text{معادله خط دایره} : (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x + 1)^2 = 16 \rightarrow x + 1$$

$$= \pm 4 \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases} \quad \text{گزینه ۱}$$

مثال: فاصله نقطه ی $M(x, y)$ از نقطه ی $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدا مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقطه M کدام است؟ (تجربی ۹۷)

- ۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \\ &= 4x^2 + 4y^2 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 \\ &= 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0 \end{aligned}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 60} = \frac{1}{2}\sqrt{80} = 2\sqrt{5}$$

قطر
ب
بزرگترین وتر

$$= 2r = 4\sqrt{5}$$

گزینه ۴

مثال: دایره ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله ی $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (تجربی ۹۵)

- ۱) 3 و 1 ۲) 4 و 1 ۳) 3 و 2 ۴) 4 و $1/5$

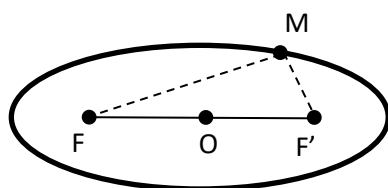
معادله خط $x - y - 1 = 0$

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

معادله دایره $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + 1 = 2 \rightarrow (x - 2)^2 = 1$

$$x - 2 = \pm 1 \begin{cases} \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 1 \end{cases} \quad \text{گزینه ۱}$$

بیضی:

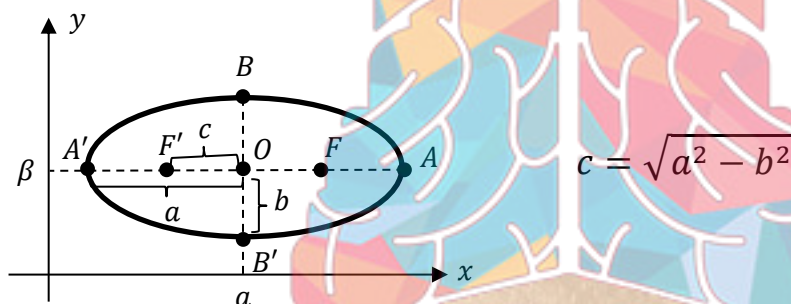


مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آن ها از دو نقطه ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه که

آن ها را کانون های بیضی می نامیم، برابر مقدار مثبت ثابت $2a$ باشد. پس اگر M نقطه ای واقع بر بیضی به کانون های F و F' باشد، آنگاه $MF + MF' = 2a$

فراہوش

بیضی افقی:



معادله استاندارد:
$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

مرکز: $O(a, \beta)$

متقارن های محور معادله: $\begin{cases} x = a \\ y = \beta \end{cases}$

مختصات راس های کانونی: $A, A'(a \pm a, \beta)$ مختصات کانون ها: $F, F'(a \pm c, \beta)$

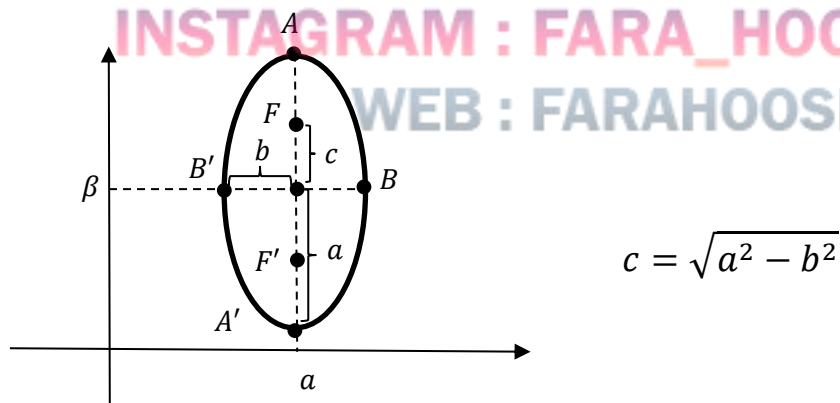
مختصات راس های ناکانونی: $B, B'(a, \beta \pm b)$

گروه مشاوره فراہوش

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

بیضی قائم:



معادله استاندارد:
$$\frac{(x - a)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1$$

مرکز: $O(a, \beta)$

معادله محور های تقارن: $\begin{cases} x = a \\ y = \beta \end{cases}$

مختصات کانون ها: $F, F'(a, \beta \pm c)$ کانونی راس های مختصات: $A, A'(a, \beta \pm a)$

مختصات راس های ناکانونی : $B, B'(a \pm b, B)$

معادله گسترده بیضی:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

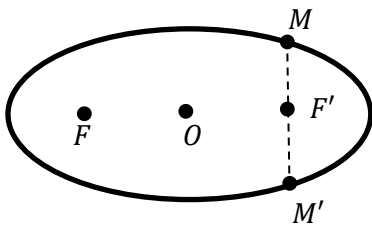
مرکز $O \left(\frac{-C}{2A}, \frac{-D}{2B} \right)$

اگر $|A| > |B|$ بیضی قائم

اگر $|B| > |A|$ بیضی افقی

- طول وتری که از کانون بر محور کانونی عمود می شود:

$$MM' = \frac{2b^2}{a}$$



خروج از مرکز بیضی (e):

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 < e < 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

گروه مشاوره فراهوش

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی (۳ و -۱) و (-۱ و -۱) است. این بیضی از نقطه ی (۲ و -۴)

می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟ (تجربی ۹۲)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$BB' = 3 - (-1) = 4 \rightarrow b = \frac{BB'}{2} = 2$$

$$\text{مرکز بیضی در وسط } B \text{ و } B' \text{ قرار دارد } O: \left(-1, \frac{3-1}{2}\right) \rightarrow O(-1, 1)$$

چون قطر کوچک موازی محور y ها است. پس بیضی، افقی است.

$$\text{معادله بیضی: } \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{روی بیضی } (-4,2)} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow a^2 = 12$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{گزینه 3}$$

مثال: در یک بیضی به کانون های $(-1, 2)$ و $(7, 2)$ و اندازه قطر کوچک ۳ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟ (تجربی-۹۸)

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۰/۶ (۱)

$$2c = FF' = 7 - (-1) = 8 \rightarrow c = 4 \quad BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow 4 = \sqrt{a^2 - 9} \rightarrow 16 = a^2 - 9 \rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0/8$$

مثال: در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲، دایره ای هم مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد بیضی را در نقطه M قطع می کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

$$2a = 2\sqrt{5} \rightarrow a = \sqrt{5} \rightarrow c = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$2b = 2 \rightarrow b = 1$$

گروه مشاوره فراهوش

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99

WEB : FARAHOOSH99.IR

مرکز دایره و بیضی را مبدا فرض می کنیم:

بیضی را افقی فرض می کنیم.

معادله بیضی : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ $\rightarrow \frac{x^2}{5} + 4 - x^2 = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{5} = 3$
 معادله دایره : $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2$

$\rightarrow x^2 = \frac{15}{4} \rightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{2} \rightarrow y^2 = 4 - \frac{15}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2}$

$M\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $F(0, 2) \rightarrow MF = \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{24}}{2}$

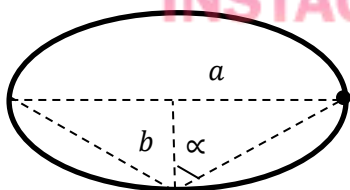
$F'(0, -2) \rightarrow MF' = \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{40}}{2}$

$MF^2 + MF'^2 = \frac{24}{4} + \frac{40}{4} = \frac{64}{4} = 16$ گزینه 2

مثال: در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک با کدام زاویه رویت می شود؟ (ریاضی خارج - ۹۸)

- 150° (۴) 120° (۳) 90° (۲) 60° (۱)

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 2 = 3 - b^2 \rightarrow b = 1$



$x^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 \rightarrow x = 2$ $\sin \alpha = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$

زاویه ای که از سر قطر کوچک تمام قطر بزرگ را می بینیم : $120^\circ = 2\alpha$

گروه مشاوره فراموش
 INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال: به ازای کدام مقدار a فاصله کانون های مقطع مخروطی $3x^2 + 4y^2 + 16y + a = 0$ برابر ۲ می باشد؟ (ریاضی ۹۷)

۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

$$3x^2 + 4y^2 + 16y + 16 - 16 + a = 0 \rightarrow 3x^2 + 4(y^2 + 4y + 4) + a - 16 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 4(y + 2)^2 + a - 16 = 0 \xrightarrow{+12x^2} \frac{x^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{3} = \frac{16 - a}{12}$$

$c = 1$ $a = 2$ $b = \sqrt{3}$ $\rightarrow 2c = 2\sqrt{3}$ $\frac{16 - a}{12} = 1 \rightarrow a = 4$

مثال: در بیضی به معادله $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می کند. اندازه MN کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۳/۵ (۴) ۳ (۳) ۲/۵ (۲) ۲ (۱)

$$\xrightarrow{+5} 16y^2 + 5x^2 + 10x + 5 = 80 \rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x + 1) = 80$$

$$16y^2 + 5(x - 1)^2 = 80 \xrightarrow{+80} \frac{y^2}{5} + \frac{(x - 1)^2}{16} = 1$$

$a = 4$ $b = \sqrt{5}$ $MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{10}{4} = 2/5$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

گزینه ۲