

کاربرد های مشتق

اکسترم های نسبی و مطلق در نمودار

ماکزیمم و مینیمم نسبی: الف) تابع f در نقطه c دارای ماکزیمم نسبی است ، اگر بر یک بازه I باز شامل c به ازای هر x واقع در I ، $f(c) \geq f(x)$ باشد

الف) تابع f در نقطه c دارای مینیمم نسبی است ، اگر بر یک بازه I باز شامل c به ازای هر x واقع در I ، $f(c) \leq f(x)$ باشد

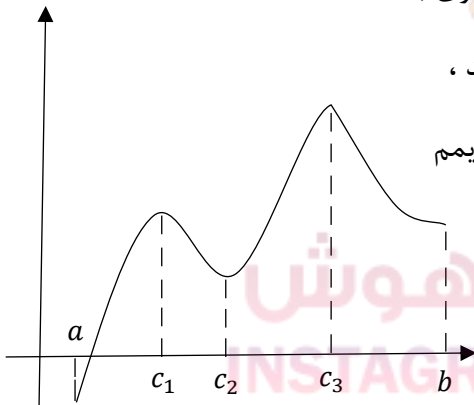
به طور غیر رسمی تابع f در $x = c$ دارای ماکزیمم نسبی (مینیمم نسبی) اگر عرض آن از نقاط در مجاورت آن بیشتر (کمتر) یا مساوی باشد .

ماکزیمم و مینیمم مطلق: به طور غیر رسمی ، نقطه ای ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) تابع f است که عرض آن از کلیه نقاط دامنه تابع یا بازه $[a, b]$ بیشتر (کمتر) یا مساوی باشد .

کم ترین مقدار تابع در نقطه a و بیشترین مقدار تابع در c_3 اتفاق می افتد ،

دقت کنید که تابع در c_1 ، c_2 و c_3 به ترتیب ماکزیمم - مینیمم - ماکزیمم

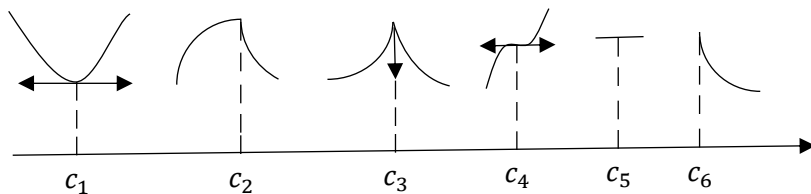
نسبی است



نقطه ی بحرانی: نقطه ی درونی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f می نامیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد .

- در شکل روبرو تابع در نقاط c_1 تا c_5 بحرانی است ،

اما در c_6 بحرانی نخواهد بود .



نتیجه: نقاط امتداد و انتهای بازه بسته ، نقاط بحرانی تابع نیستند .

طریقه یافتن نقاط بحرانی: وقتی ضابطه تابع داده شده است ، برای یافتن نقاط بحرانی ، ابتدا دامنه تابع را یافته ، سپس از تابع مشتق گرفته و نقاط درونی از دامنه را که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد بدست می آوریم

مثال : نقاط بحرانی تابع $y = x^3 - 3x$:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

در توابع چند جمله ای نقاط بحرانی از حل معادله $y' = 0$ بدست می آیند

در توابع قدر مطلقى به شکل $y = |f(x)|$ نقاط بحرانی از حل معادله های $f'(x) = 0$ و $f(x) = 0$ بدست می آیند .

اکسترمم های مطلق در توابع پیوسته : استفاده از مشتق و تعیین نقاط بحرانی ← مقدار نقطه بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای تابع را در آن می گذارید و عرض نمودار را برای آن نقطه بدست می آورید . سپس بیشترین عدد Max مطلق و کمترین عدد Min مطلق تابع خواهد بود

مثال : Max و Min مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ در بازه $[-\frac{1}{2}, 2]$ را بیابید .

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \longrightarrow 3x(x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{نقطه بحرانی} \\ x = 2 & \text{نقطه انتهای بازه} \end{cases}$$

$$f(0) = 1 \quad \underline{\underline{Max}} \quad \text{مطلق} \quad f(2) = 8 - 12 + 1 = -3 \quad \underline{\underline{Min}} \quad \text{مطلق} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{8}$$

مثال : تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 1 \checkmark \\ x = -1 \times \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \checkmark \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \checkmark \end{cases} \quad \text{نقطه بحرانی ۴}$$

مثال : بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است ؟ (سراسری

تجربی ۹۲)

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{در بازه نیست}$$

$$x = -2 \rightarrow y(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

$$x = -1 \rightarrow y(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$x = 2 \rightarrow y(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

تمرین : کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است ؟ (سراسری خارج ۹۲)

$$-۱۸ \text{ (۴)}$$

$$-۲۴ \text{ (۳)}$$

$$-۳۲ \text{ (۲)}$$

$$-۳۶ \text{ (۱)}$$

تشخیص یکنوایی توابع با استفاده از مشتق : فرض کنیم تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد ، در این صورت :

الف ($f'(x) < 0$ ← اکیدا نزولی (نزولی)

ب ($f'(x) > 0$ ← اکیدا صعودی (صعودی)

ج ($f'(x) = 0$ ← تابع ثابت

یکنوایی تابع با ضابطه $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ را بررسی کنید .

$$y' = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

x		-1	0	1	
y'		+	-	-	+

صعودی

نزولی

صعودی

مثال : در تابع با ضابطه $f(x) = x|x - 4|$ فاصله دو نقطه Max نسبی و Min نسبی آن کدام است ؟ (تجربی ۹۸)

$$2\sqrt{5} \text{ (۴)}$$

$$3\sqrt{2} \text{ (۳)}$$

$$2\sqrt{2} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{5} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x \geq 4 \\ -2x + 4 & x \leq 4 \end{cases} \rightarrow -2x + 4 = 0$$

$$\rightarrow x = 2$$

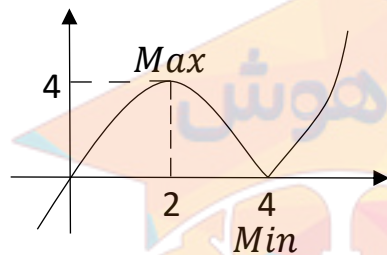
$$2$$

$$4$$

$$f(2) = 4 \text{ و } f(4) = 0 \\ = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{c} \overline{- \quad | \quad +} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{فاصله : } \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} \\ \text{نسبی Max} \quad \quad \quad \text{نسبی Min} \end{array}$$

راه دوم رسم شکل :



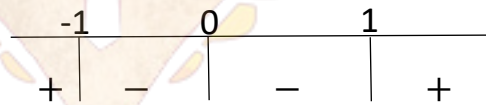
مثال : در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ فاصله دو نقطه ی Max و Min نسبی آن کدام است ؟
(تجربی خارج ۹۸)

۴ (۴) $3\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

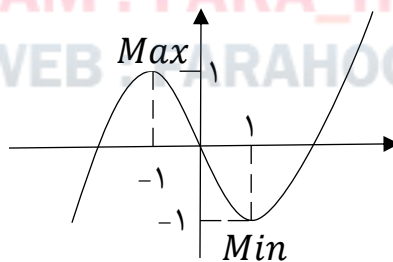


$$f(-1) = -1 + 2 = 1$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$\sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} \\ = 2\sqrt{2}$$

رسم شکل (راه دوم) :



مثال : کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است ؟ (تجربی خارج ۹۰)

-۱۸ (۴) -۲۴ (۳) -۳۲ (۲) -۳۶ (۱)

$$y' = x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0 \rightarrow x(x-4)(x+1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \quad x = 0 \rightarrow y = 0 \quad x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{4} + 1 - 2 = -\frac{3}{4}$$

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4} \times 256 - 64 - 32 = -32$$

مثال: مقادیر Min و Max مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

(۱) -18 و 24 (۲) -45 و 27 (۳) -36 و 27 (۴) -27 و 36

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow \text{در دامنه تابع قرار ندارد} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(-3) = \frac{1}{3}(-27) - 9 + 45 = 45 - 18 = 27 \quad \text{مطلق } Max$$

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-64) - 16 + 60 = 44 - \frac{64}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(27) - 9 - 45 = -45 \quad \text{مطلق } Min$$

تقریر منحنی:

الف) تقریر رو به بالا: تقریر یک منحنی مشتق پذیر را در یک بازه رو به بالا گوییم هرگاه مماس بر منحنی در همه نقاط این بازه زیر منحنی باشد.



$$f' > 0 \text{ و } f'' > 0$$

$$f' < 0 \text{ و } f'' < 0$$

$$> 0$$

ب) تقریر رو به پایین: تقریر یک منحنی مشتق پذیر را در یک بازه رو به پایین گوییم هرگاه مماس بر

منحنی در همه نقاط این بازه بالای منحنی باشد.



$$f' > 0 \text{ و } f'' < 0$$

$$f' < 0 \text{ و } f'' > 0$$

$$< 0$$

تعریف تقریر: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x در بازه I موجود باشد > 0 .

الف) اگر به ازای هر x از بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقریری رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از بازه باز I ، $f'''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه باز I تقریبی رو به پایین دارد.

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالاست؟ (ریاضی ۹۲)

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 3x \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax + 3 > 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 36a^2 - 144 < 0 \rightarrow a^2 < 4 \quad \boxed{-2 < a < 2}$$

$$x^2 \text{ ضریب} > 0 \rightarrow 12 > 0$$

مثال: تقعر نمودار تابع $y = (x+3)\sqrt{x}$ در بازه (a, b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

$$y' = \sqrt{x} + (x+3) \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{2x + (x+3)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{3(2\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}(3x+3)}{(2\sqrt{x})^2} < 0 \rightarrow \frac{6x - (3x+3)}{4x\sqrt{x}} < 0 \rightarrow \frac{3x-3}{4x\sqrt{x}} < 0$$

$$\rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow b - a = 1$$

تمرین: تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2+2}$ در بازه $(a, +\infty)$ رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است؟ (تجربی ۹۲)

WEB: FARAHOOSH99.IR

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $-\infty$

مثال: در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالاست؟ (تجربی ۹۳)

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9)$$

$$-4x(x-3)^2 \leq 0 \rightarrow x \geq 0 \quad (1)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36 = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-1)(x-3) > 0$$

تعیین علامت

(۲)

$$(1) \cap (2) \rightarrow x \in (1, 3)$$

$$1 < x < 3$$

فراهوش

مثال: نمودار تابع $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-\infty, -2)$

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = 0 \rightarrow x = 1$$

ریشه مخرج $x = 1$

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x\sqrt[3]{x^2}}\right) \rightarrow x = -2$$

نقطه عطف $x = -2$

$\begin{array}{c} - \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \end{array} \rightarrow -2 < x < 0$

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ,

معادله $f(x) = m$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $m < 2$ یا $m > 7$ (۲) $m < 3$ یا $m > 6$

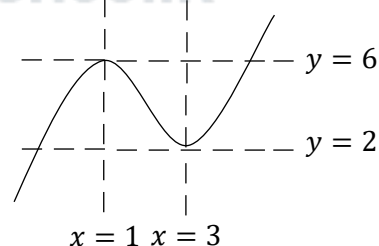
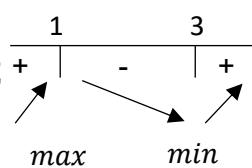
(۳) $m < 3$ یا $m > 7$ (۴) $m < 2$ یا $m > 6$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \div 3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

نقاط بحرانی

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$$



تمرین: در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به

پایین است؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(0, 1)$

فراهوش

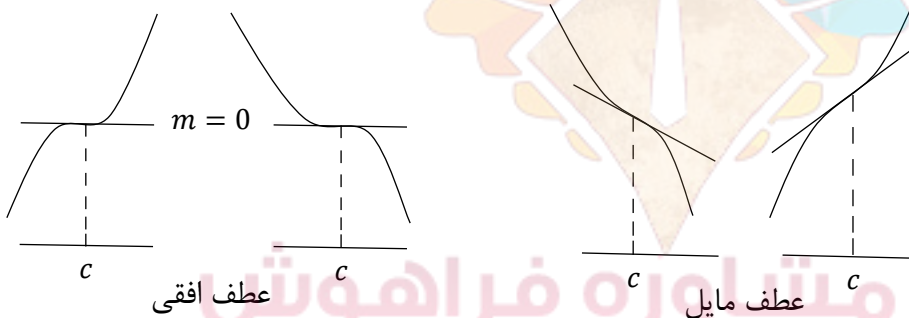
نقطه ی عطف :

تعریف (فرض کنید تابع f در $x = c$ پیوسته باشد ، در این صورت تابع f در c نقطه ی عطف دارد هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد :

الف (نمودار f در c خط مماس داشته باشد

ب) جهت تقعر تابع f در c تغییر کند . (علامت f'' در دو طرف c عوض شود)

شکل های ممکن نقطه عطف در زیر رسم شده است :



گروه مشاوره فراهوش
 INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
 WEB : FARAHOOSH99.IR

روش یافتن نقطه ی عطف : y'' را محاسبه کرده و آن را تعیین علامت می کنیم ، در هر نقطه ای که y'' تغییر علامت دهد ، برای عطف بودن باید در آن نقطه خط مماس داشته باشد .

مثال : نقاط عطف توابع زیر را بیابید .

$$1) y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2 \rightarrow y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{عطف افقی} \rightarrow y'(0) = 0$$

$$2) y = 2x^6 - 5x^4 \rightarrow y' = 12x^5 - 20x^3 \rightarrow y'' = 60x^4 - 60x^2$$

$$= 60x^2(x^2 - 1) = 0$$

در $x = 0$ ، y'' تغییر علامت نمی دهد پس نقطه ی عطف نیست \rightarrow ریشه مضاعف $x = 0$
 \rightarrow هر دو عطف مایل $y'(-1) = 8$ ، $y'(1) = -8$ $\rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0$

مثال : نمودار تابع $y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است ؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)



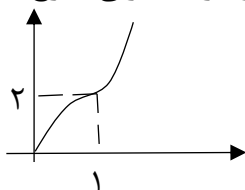
$$y' = \frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3} - \frac{12}{5\sqrt[5]{x^2}} \rightarrow y' = \frac{8x - 12}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

خط مماس در $x = 0$ قائم است . $(y'(0) \rightarrow -\infty)$
 در اطراف $x = 0$ مقدار y' منفی است \leftarrow در نتیجه تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است .

تمرین : نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است ؟ (سراسری تجربی ۹۱)



مثال : شکل روبرو نمودار تابع $y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$ است . b کدام است ؟ (سراسری تجربی خارج ۹۲)



(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

نقطه $(1,2)$ نقطه ی عطف است زیرا تابع در این نقطه تغییر تقعر می دهد .

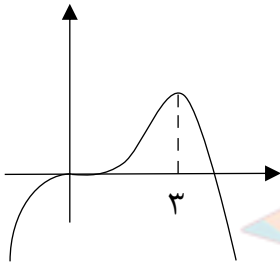
$$y = ax\sqrt{x} + b\sqrt{x} \xrightarrow[\in f]{(1,2)} \boxed{2 = a + b} \text{ (1)}$$

$$y' = \frac{3}{2}a\sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{3ax + b}{2\sqrt{x}} \quad y'' = \frac{3a(2\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}(3ax + b)}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$\rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6a - (3a + b) = 0 \rightarrow \rightarrow b = 3a \quad \boxed{3a - b = 0}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow 2 = a + 3a = 4a \rightarrow a = \frac{1}{4} \quad b = \frac{3}{2}$$

مثال : شکل روبرو نمودار تابع $y = ax^4 + 2x^3 + bx^2$ است . a کدام است ؟ (سراسری تجربی ۹۲)



در $x = 0$ نقطه عطف : $y' = 4ax^3 + 6x^2 + 2bx$

$$y'' = 12ax^2 + 12x + 2b \rightarrow$$

$$y''(0) = 0 + 0 + 2b = 0 \rightarrow b = 0$$

در $x = 3$ نقطه عطف نسبی پس $y'(3) = 0$

$$y'(3) = 4a(3)^3 + 6(3)^2 + 0 = 0 \rightarrow a = \frac{-6 \times 3^2}{4 \times 3^3} = -\frac{1}{2}$$

مثال : اگر $A(1, -3)$ نقطه عطف منحنی به معادله $y = ax^3 - x^2 - 3x + b$ باشد ، مقدار تابع در نقطه Max نسبی آن کدام است ؟ (تجربی ۹۶)

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

$$y' = 3ax^2 - 2x - 3$$

$$y'' = 6ax - 2 \quad y'' = 6a - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$-3 = a - 1 - 3 + b \rightarrow a + b = 1 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

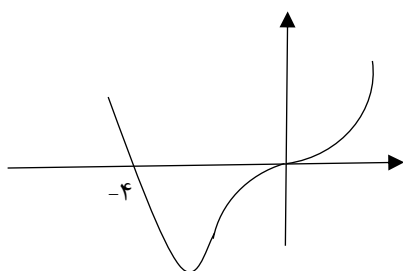
قرار دادن نقطه عطف در ضابطه تابع :

$$y' = x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{گزینه ۳}$$

WEB : FARAHOOSH99.IR

مثال : شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ است . با تعیین مقادیر a و b min تابع کدام است ؟ (تجربی ۹۵)



- (۱) -۳۶ (۲) -۳۲ (۳) -۲۷ (۴) -۲۴

$$\text{نقطه} \rightarrow 256 - 64a - 4b = 0 \rightarrow 16a + b \quad \textcircled{1}$$

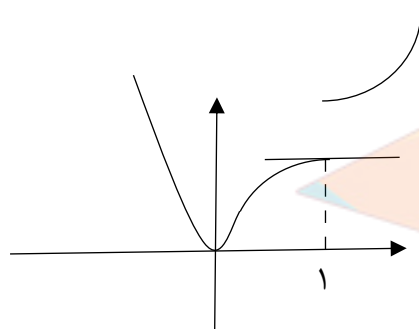
$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$\textcircled{1} \quad a = 4 \quad f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

مثال : شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است . کدام است ؟ (ریاضی)

(۹۸)



$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

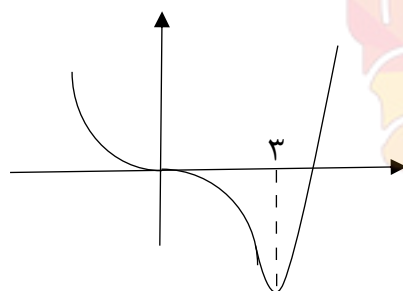
$$f''(x) = 36x^2 + 6ax + 2b \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = -36$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b = -12 \Rightarrow 3a = -24 \rightarrow a = -8$$

$$6a + 2b = -36$$

مثال : شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ است . کدام است ؟ (ریاضی)

خارج (۹۸)



$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx \rightarrow f'(3) = 0$$

$$\rightarrow 108 + 27a + 6b = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b \rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0$$

$$b = 0$$

$$b = 0$$

$$27a + 6b + 108 = 0 \rightarrow a = -4$$

$$f(-2) = 16 + 32 + 0 = 48 \quad \text{گزینه ۴}$$

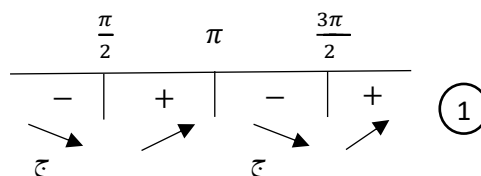
مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$; $x \in [0, 2\pi]$ در کدام بازه نزولی و صعودی آن

رو به پایین است ؟ (ریاضی ۹۶)

$$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (۴)} \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ (۳)} \quad \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right) \text{ (۲)} \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (۱)}$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x + 2\sin x = -\sin 2x + 2\sin x = 0 \rightarrow \sin 2x = 2\sin x$$

$$0 \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{4\pi}{3} \quad 2\pi$$



$$\begin{cases} 2x = 2(2k\pi + x) \rightarrow 2k\pi = 0 \\ 2x = 2(2k\pi + \pi - x) \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f''(x) = -2\cos 2x + 2\cos x = 0 \rightarrow \cos 2x = \cos x \rightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

مثال : طول نقطه ی عطف تابع $y = (5-x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است ؟ (ریاضی ۹۵)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$$y' = -\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5-x)$$

$$y'' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(5-x) - x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2(5-x)}{9\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'' = \frac{-6x - 10 + 2x - 6x}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-10x - 10}{9\sqrt[3]{x^4}} \quad -10x - 10 = 0 \rightarrow x = -1$$

طول نقطه عطف

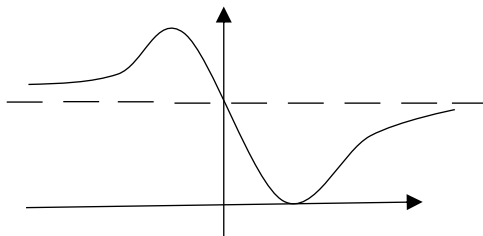
تمرین : اگر تابع هایی به صورت $f(x) = x^3 - (x+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند ، آنگاه

مجموعه طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است ؟ (تجربی ۹۴)

(۱) $[-2,0]$ (۲) $[-2,2]$ (۳) $[-1,1]$ (۴) $[0,1]$

تمرین : شکل رو به رو نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}$ است . $a + b$ کدام است ؟

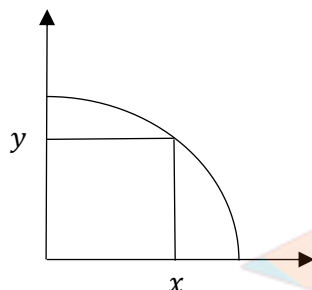
(تجربی ۹۴)



(۱) -۷ (۲) -۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

بهینه سازی :

مثال : بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محور های مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود کدام است ؟ (تجربی ۹۸)



۱۸ (۴) ۱۶ (۳) $8\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۱)

$$s = xy = x\sqrt{12-x}$$

$$s' = \sqrt{12-x} + \frac{-1}{2\sqrt{12-x}}(x)$$

$$= \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

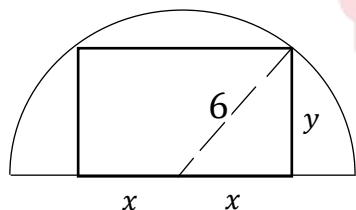
$$\frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

$$24-3x = 0 \rightarrow x = 8$$

$$s = 8\sqrt{12-8}$$

= 16 گزینه ۳

مثال : بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد کدام است ؟ (تجربی خارج ۹۸)



۳۶ (۴) ۲۷ (۳) ۲۴ (۲) ۱۸ (۱)

$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y = \sqrt{36-x^2}$$

$$s = 2xy = 2x\sqrt{36-x^2}$$

$$s' = 2\sqrt{36-x^2} + \frac{-4x^2}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{4(36-x^2) - 4x^2}{2\sqrt{36-x^2}} = 0 \rightarrow 2(36-x^2) - 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow 72 - 2x^2 - 2x^2 = 0 \rightarrow 4x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$s = 2xy = 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{36-18} = 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36 \quad \text{گزینه ۴}$$