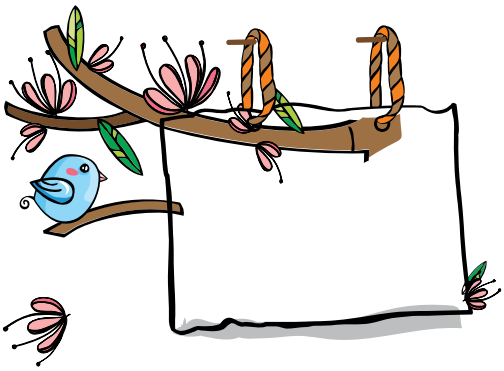


نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: جمعبندی تشریحی تابع یازدهم تجربی

۱ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+1}}$$

۲ اگر $f(x)=\sqrt{[x]-1}$ و $g=\{(-2,0)(5,3)(0,7)(2,8)\}$ باشد در این صورت $\frac{2f-3g}{g}$ را به دست آورید.

۳ اگر $D_f=[2,5]$ و $D_g=[4,12]$ آنگاه دامنه‌ی $f(\frac{x}{2})+g(2x)$ را بدست آورید.

۴ a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\geq 1\\ 2x+3 & x<1\end{cases}$ یک به یک باشد.

۵ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان تابع معکوس تابع را بیابید.

$$\begin{cases}f:[1,+\infty)\to R\\ f(x)=x^2-2x+5\end{cases}$$

۶ به ازای کدام مقدار k، $f(x)=\begin{cases}kx+2 & x\geq 2\\ x^3 & x\leq 2\end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟

۷ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x+1|-4}}$$

۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\sqrt{|x+1|+x-3}$$

۹ اگر دو تابع $f(x)=x+4$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} & x\neq 4\\ k-1 & x=4\end{cases}$ مساوی باشند k را به دست آورید.

۱۰ اگر $f=\{(-2,-1)(-1,0)(0,2)(-3,3)\}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد دامنه‌ی تابع $f+g$ وتابع $\frac{f}{2g}$ را به دست آورید.

۱۱ a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر یک‌به‌یک باشد.

$$f=\{(1,4)(2,a+3)(b^2-3,4)(2,b+1)(3,a+b)\}$$

۱۲ نمودار تابع $y=[\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6,6]$ رسم کنید.

۱۳ آیا توابع f,g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{(x+2)^2(x-3)}$, $g(x)=|x+2|\sqrt{x-3}$ با هم مساویند؟ چرا؟

۱۴ معکوس پذیری $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^3-1}}$ را تحقیق کنید و در صورت معکوس پذیری ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۱۵ نمودار تابع $f(x)=[2x]$ را در بازه‌ی $[0,1)$ رسم کنید.

۱۶ نمودار تابع $y=2x-[x]$ را در بازه $[-1,1)$ رسم کنید.

۱۷ اگر $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}$ باشد، $f^{-1}(x)$ را بیابید. تحت کدام شرایط برای a و b و c داریم $f=f^{-1}$.

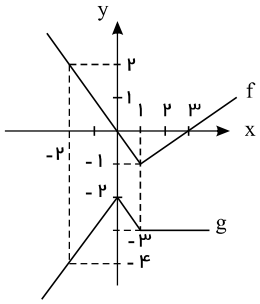
۱۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

۱۹ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{1}{2}x+1\right]$ را در بازه‌ی $[-2,2)$ رسم کنید.

فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR

۲۰ نمودار توابع f و g به‌صورت مقابل است، حاصل عبارات زیر را بیابید.



الف) $(f+g)(۰)$ ب) $(۲f-g^{۲})(-۲)$

ج) $(\frac{f-۳}{g})(۳)$ د) $(\frac{۳f-g}{g+۴f})(۱)$

۲۱ توابع $f(x)=\begin{cases}۵x-۷ & x\geq ۱\\ -x-۱ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}x-۲ & x\geq -۲\\ -۱ & x<-۲\end{cases}$ مفروضند. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(f+g)(-۴)$ ب) $(f-۲g)(۳)$ ج) $(\frac{f+۳}{g})(۰)$ د) $(f\times g-۵)(\frac{۱}{۳})$

۲۲ اگر $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$، توابع $f+g, f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR

پاسخنامه تشریحی

۱

$f(x)=\sqrt{\sqrt{x+۳}-\sqrt{۲x+۱}} \to (I)\ x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳$ و $(II)\ ۲x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲}$

$(III)\ \sqrt{x+۳}-\sqrt{۲x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۳}\geq \sqrt{۲x+۱} \Rightarrow$ توان ۲ $\Rightarrow x+۳\geq ۲x+۱ \Rightarrow x\leq ۲$

$(I)\cap(II)\cap(III) \Rightarrow D_f=\left[-\frac{۱}{۲},۲\right]$

۲

$D_f=[x]\geq ۱ \quad \Rightarrow \quad x\geq ۱$ و $D_g=\{-۲,۵,۰,۲\}$

$D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\{۵,۲\}$

$\frac{۲f-۳g}{g}=\left\{\left(۲,\frac{۲-۲۴}{۸}\right)\left(۵,\frac{۴-۹}{۳}\right)\right\}=\left\{(۲,\frac{-۱۱}{۴})(۵,\frac{-۵}{۳})\right\}$

۳

$D_f=[۲,۵]$

$f(\frac{x}{۲}) \quad \Rightarrow \quad ۲\leq \frac{x}{۲}\leq ۵ \quad \Rightarrow \quad ۴\leq x\leq ۱۰$

$D_g=[۴,۱۲]$

$g(۲x) \quad \Rightarrow \quad ۴\leq ۲x\leq ۱۲ \quad \Rightarrow \quad ۲\leq x\leq ۶$

$D_{f(\frac{x}{۲})}\cap D_{g(۲x)}=[۴,۶]$

۴

برای یک به یک بودن باید همه‌ی ضابطه‌ها یک به یک باشند و سپس اشتراک بردهای آنها تهی باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+a \quad x\geq ۱ \to x^۲+a & \text{یک به یک } \checkmark \\ ۲x+۳ \quad x<۱ \to ۲x+۳ & \text{یک به یک } \checkmark \end{cases}$$

$R_۱ \Rightarrow x\geq ۱ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow x^۲+a\geq ۱+a \Rightarrow y\geq ۱+a$

$R_۲ \Rightarrow x<۱ \Rightarrow ۲x<۲ \Rightarrow ۲x+۳<۵ \Rightarrow y<۵$

$R_۱\cap R_۲=\varnothing \Rightarrow ۱+a\geq ۵ \Rightarrow a\geq ۴$

۵

$\begin{cases} f:[۱,+\infty)\to R \\ f(x)=x^۲-۲x+۵=x^۲-۲x+۱+۴=(x-۱)^۲+۴ \Rightarrow (x-۱)^۲\geq ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+۴\geq ۴ \Rightarrow y\geq ۴ \end{cases}$

$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow (x_۱-۱)^۲+۴=(x_۲-۱)^۲+۴$

$\Rightarrow (x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲ \to |x_۱-۱|=|x_۲-۱| \xrightarrow{x\geq ۱} x_۱-۱=x_۲-۱ \to x_۱=x_۲$

پس یک به یک است و تابع معکوس دارد.

$y=(x-۱)^۲+۴$

$y-۴=(x-۱)^۲ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y-۴}=|x-۱|$

$\xrightarrow{x\geq ۱} x=\sqrt{y-۴}+۱ \xrightarrow{x\to y} y=\sqrt{x-۴}+۱$

$\begin{cases} f^{-۱}:[۴,+\infty)\to[۱,+\infty) \\ f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۴}+۱ \end{cases}$

۶

هر دو ضابطه در $x=۲$ مشترک هستند بنابراین باید مقادیرشان در این نقطه برابر باشد.

فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR

$f(۲) \Rightarrow$ در هر دو ضابطه باید یک مقدار بدهد.

$k(۲)+۲=(۲)^{۳} \quad \Rightarrow \quad ۲k+۲=۸ \quad \Rightarrow \quad k=۳$

۷

$f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$ باید زیر رادیکال مثبت باشد.

$|x+۱|-۴>۰ \Rightarrow |x+۱|>۴ \Rightarrow x+۱<-۴ \text{ یا } x+۱>۴$

$\Rightarrow x<-۵ \text{ یا } x>۳ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۵)\cup(۳,+\infty)$

۸

$f(x)=\sqrt{|x+۱|+x-۳}$

$|x+۱|+x-۳\geq ۰$

$x\geq -۱ \rightarrow x+۱+x-۳\geq ۰ \rightarrow ۲x\geq ۲ \rightarrow x\geq ۱$

$x<-۱ \rightarrow -x-۱+x-۳\geq ۰ \rightarrow -۴\geq ۰ \rightarrow \varnothing$

$D_f=[۱,+\infty)$

۹

چون مساویند پس دامنه‌ی هر دو تابع برابر است و باید مقادیرشان در همه‌ی نقاط برابر باشد بنابراین:

$f(۴)=g(۴) \quad \Rightarrow \quad ۴+۴=۸=g(۴)$

$g(۴)=k-۱=۸ \quad \Rightarrow \quad k=۹$

۱۰

$D_f=\{-۲,-۱,۰,-۳\}$ و $D_g=۴-x^{۲}\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x^{۲}\leq ۴ \quad \Rightarrow \quad -۲\leq x\leq ۲$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g \Rightarrow D_{f+g}=\{-۲,-۱,۰\}$

$\dfrac{f}{۲g}=? \qquad D_{\frac{f}{۲g}}=(D_f\cap D_g)-\{g=۰\}$ و $D_f=\{-۳,-۲,-۱,۰\}$ و $D_g=-۲\leq x\leq ۲$

$\sqrt{۴-x^{۲}}=۰ \Rightarrow$ توان ۲ $\Rightarrow ۴-x^{۲}=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$

$D_{\frac{f}{۲g}}=\{-۱,۰\} \rightarrow \dfrac{f}{۲g}=\{(-۱,۰)(۰,\dfrac{۲}{۲\times ۲}=\dfrac{۱}{۲})\}=\{(-۱,۰),(۰,\dfrac{۱}{۲})\}$

۱۱

شرط یک به یک بودن زوج مرتب این است که مؤلفه‌ی دوم برابر نداشته باشد و در صورت برابری مؤلفه‌ی دوم باید مؤلفه‌ی اول هم برابر باشند.

$(۲,b+۱),(۲,a+۳) \Rightarrow$ چون تابع است $\Rightarrow b+۱=a+۳ \Rightarrow b=a+۲$

$(۱,۴),(b^{۲}-۳,۴) \Rightarrow$ چون یک به یک است $\Rightarrow b^{۲}-۳=۱ \Rightarrow b=\pm ۲$

$b=a+۲ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \Rightarrow & a=۰ \\ b=-۲ \Rightarrow & a=-۴ \end{cases}$

۱۲

$y=\left[\dfrac{۱}{۳}x\right] \quad x\in[-۶,۶] \quad \Rightarrow \quad \dfrac{۱}{۳}x\in[-۲,۲]$

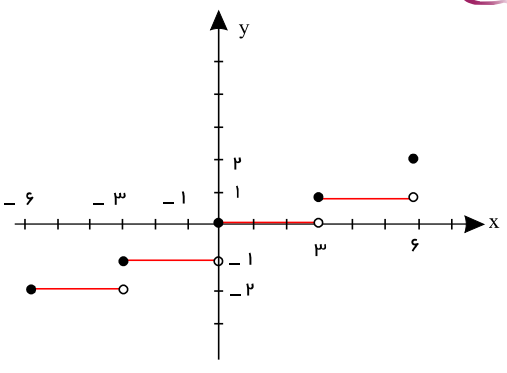
$-۲\leq \dfrac{۱}{۳}x<-۱ \quad \Rightarrow \quad -۶\leq x<-۳ \quad \Rightarrow \quad y=-۲$

$-۱\leq \dfrac{۱}{۳}x<۰ \quad \Rightarrow \quad -۳\leq x<۰ \quad \Rightarrow \quad y=-۱$

$۰\leq \dfrac{۱}{۳}x<۱ \quad \Rightarrow \quad ۰\leq x<۳ \quad \Rightarrow \quad y=۰$

$۱\leq \dfrac{۱}{۳}x<۲ \quad \Rightarrow \quad ۳\leq x<۶ \quad \Rightarrow \quad y=۱$

$\dfrac{۱}{۳}x=۲ \quad \Rightarrow \quad x=۶ \quad \Rightarrow \quad y=۲$



فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR

۱۳

$$(x+۲)^۲(x-۳)\geq ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳ \end{matrix} \Rightarrow D_f=[۳,+\infty)\cup\{-۲\}$$

$$(x-۳)\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳ \qquad D_g=[۳,+\infty)$$

$$D_f\neq D_g \Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

۱۴ تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow \sqrt{۱-\sqrt{x_۱^۳-۱}}=\sqrt{۱-\sqrt{x_۲^۳-۱}}$$

$$\Rightarrow ۱-\sqrt{x_۱^۳-۱}=۱-\sqrt{x_۲^۳-۱} \rightarrow x_۱^۳-۱=x_۲^۳-۱ \rightarrow x_۱=x_۲$$

تابع یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x^۳-۱}}=y \Rightarrow ۱-\sqrt{x^۳-۱}=y^۲$$

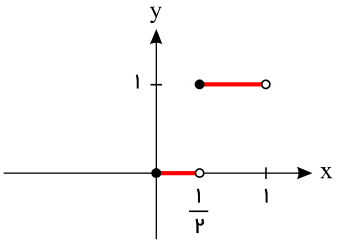
$$\Rightarrow ۱-y^۲=\sqrt{x^۳-۱} \Rightarrow x^۳-۱=(۱-y^۲)^۲ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{(۱-y^۲)^۲+۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۲+۱}$$

۱۵

$$f(x)=[۲x] \qquad ۰\leq x<۱ \rightarrow ۰\leq ۲x<۲$$

$$۰\leq ۲x<۱ \rightarrow ۰\leq x<\frac{۱}{۲} \rightarrow y=۰$$

$$۱\leq ۲x<۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}\leq x<۱ \rightarrow y=۱$$

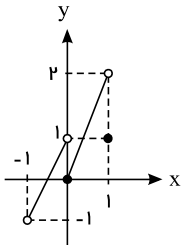


۱۶

$$-۱<x<۰ \rightarrow y=۲x-(-۱)=۲x+۱ \qquad \begin{vmatrix} -۱ \\ -۱ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$$

$$۰\leq x<۱ \rightarrow y=۲x-۰=۲x \qquad \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$$

$$x=۱ \rightarrow y=۲-۱=۱$$



۱۷

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow y=\frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow xy+yd=ax+b$$

$$\Rightarrow xy-ax=b-yd \Rightarrow x(y-a)=b-yd \Rightarrow x=\frac{b-yd}{y-a} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{b-dx}{x-a}$$

$$\Rightarrow y=\frac{b-xd}{x-a}=\frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow a=-d \Rightarrow a+d=۰$$

۱۸

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲+x}-\sqrt{۲-x}}$$

$$(I)\ ۲+x\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\geq -۲$$

$$(II)\ ۲-x\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\leq ۲$$

$$(III)\ \sqrt{۲+x}-\sqrt{۲-x}\neq ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲+x\neq ۲-x \Rightarrow ۲x\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰$$

$$(I)\cap(II)\cap(III) \quad \Rightarrow \quad D_f=[-۲,۲]-\{۰\}$$

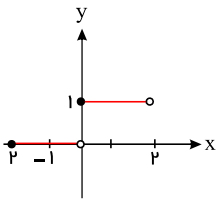
فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR

۱۹

$$f(x)=\left[\frac{۱}{۲}x+۱\right]=\left[\frac{۱}{۲}x\right]+۱$$

$$-۲\le x<۰\to -۱\le \frac{۱}{۲}x<۰\to \left[\frac{۱}{۲}x\right]=-۱\to f(x)=۰$$

$$۰\le x<۲\to ۰\le \frac{۱}{۲}x<۱\to \left[\frac{۱}{۲}x\right]=۰\to f(x)=۰+۱=۱$$



۲۰

الف) $(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۰+(-۲)=-۲$

ب) $(۲f-g^{۲})(-۲)=۲f(-۲)-g^{۲}(-۲)=۲\times ۲-(-۴)^{۲}=۴-۱۶=-۱۲$

ج) $(\frac{f-۳}{g})(۳)=\frac{f(۳)-۳}{g(۳)}=\frac{۰-۳}{-۳}=۱$

د) $(\frac{۳f-g}{g+۴f})(۱)=\frac{۳f(۱)-g(۱)}{g(۱)+۴f(۱)}=\frac{۳(-۱)-(-۳)}{-۳+۴(-۱)}=\frac{-۳+۳}{-۷}=۰$

۲۱

الف) $(f+g)(-۴)=f(-۴)+g(-۴)=۴-۱+(-۱)=۲$

ب) $(f-۲g)(۳)=f(۳)-۲g(۳)=۱۵-۷-۲(-\frac{۳}{۲}-۲)=۸+۳+۴=۱۵$

ج) $(\frac{f+۳}{g})(۰)=\frac{f(۰)+۳}{g(۰)}=\frac{-۱+۳}{-۲}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

د) $(f\times g-۵)(\frac{۱}{۳})=f(\frac{۱}{۳})\cdot g(\frac{۱}{۳})-۵=(-\frac{۱}{۳}-۱)(-\frac{۱}{۶}-۲)-۵$

$=(-\frac{۴}{۳})(-\frac{۱۳}{۶})-۵=\frac{۲۶}{۹}-۵=\frac{-۱۹}{۹}$

۲۲

$$f=\left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\right\},D_f=\left\{-۴,-۱,۰,\frac{۵}{۲},۳\right\}$$

$$g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\},D_g=\{-۴,-۲,۰,۳,۵,۹\}$$

$$D_f\cap D_g=\{-۴,۰,۳\}$$

$$f+g=\{(-۴,۱۳+(-۷)),(۰,۵+(-۳)),(۳,-۵+۰)\}=\{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$

$$f-g=\{(-۴,۱۳-(-۷)),(۰,۵-(-۳)),(۳,-۵-۰)\}=\{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(-۴,\frac{۱۳}{-۷}),(۰,\frac{۵}{-۳}),\underbrace{(۳,\frac{-۵}{۰})}_{\text{تعریف نشده}}\}=\left\{(-۴,-\frac{۱۳}{۷}),(۰,-\frac{۵}{۳})\right\}$$

فراهوش
INSTAGRAM.COM/FARA
WEB.FARAHOOSH99.IR