بانام ویارخدا

مدرس : نسیبه دهنوی

"مثلثات"

تناوب ونمودارهای مثلثاتی :

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم ومینیم هرکدام ازتوابع زیر رامحاسبه آورید :

الف) $y = -2 + 5\sin 6x$

ب) $y = \sqrt{2} - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

ج) $y = 3\sqrt{2}\sin\left(-\frac{1}{3}x\right)$

د) $y = -\pi\cos(2x) - 1$

ه) $y = 3 + \sqrt{2}\tan(4x)$

۲) دوره تناوب هرکدام ازتوابع زیر رامحاسبه آورید ونمودار آنها رادریک دوره تناوب رسم کنید:

الف) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

ب) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

ب) $y = 2 + \sin(4x)$

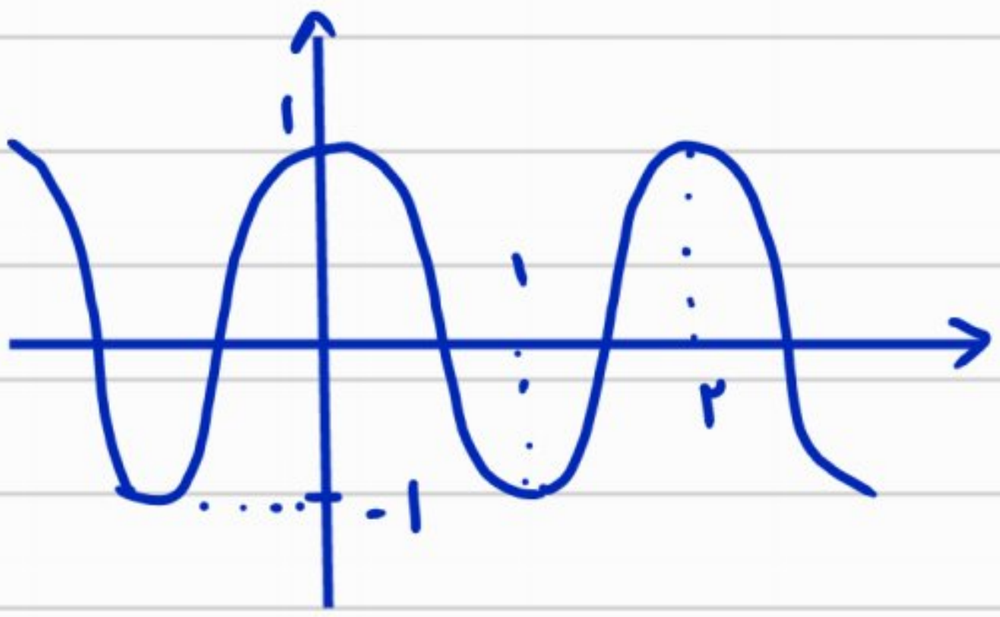
۳) هریک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر تطبیق کنید :

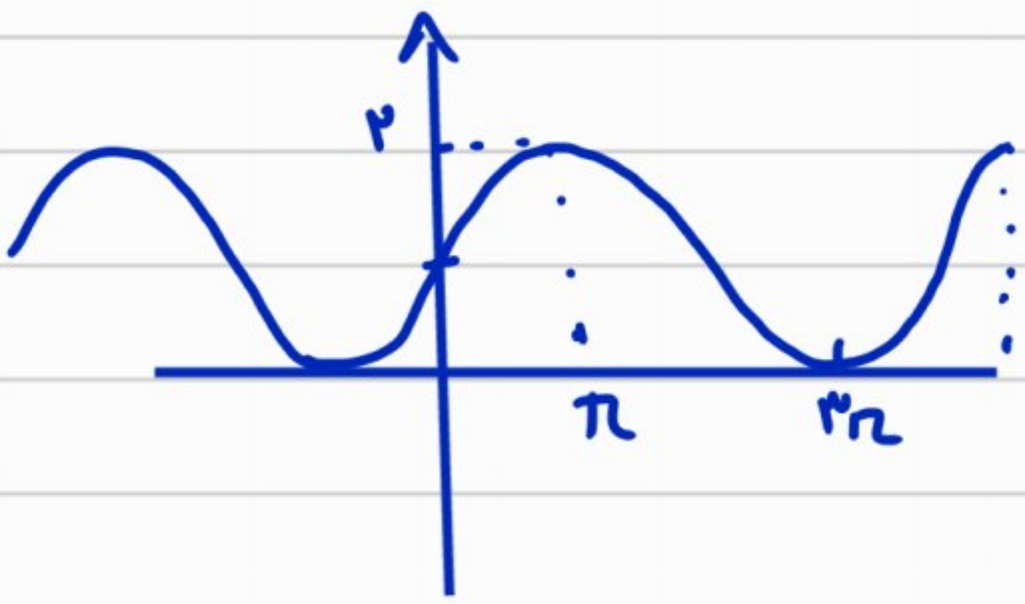
۱) $y = \cos(\pi x)$

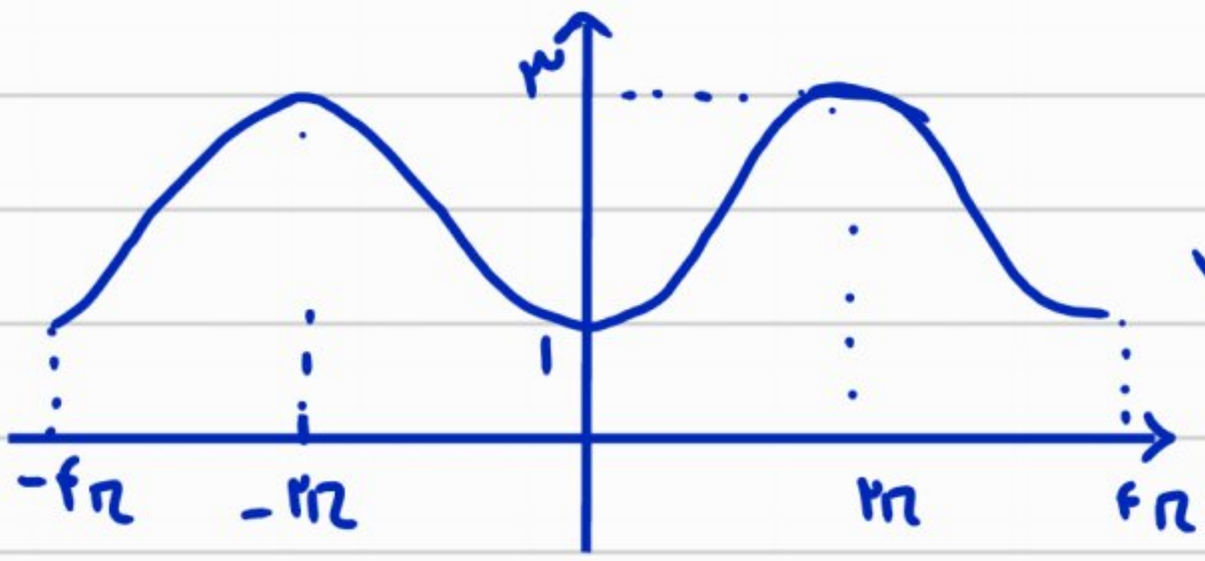
۲) $y = 2 - \sin(2x)$

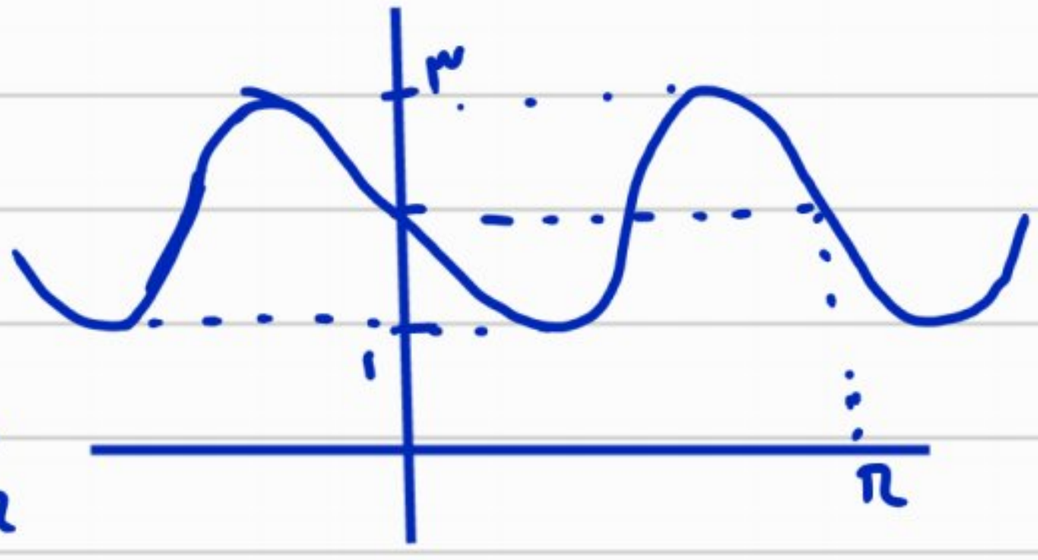
۳) $y = 2 - \cos(\frac{x}{2})$

۴) $y = \sin(\frac{x}{2}) + 1$





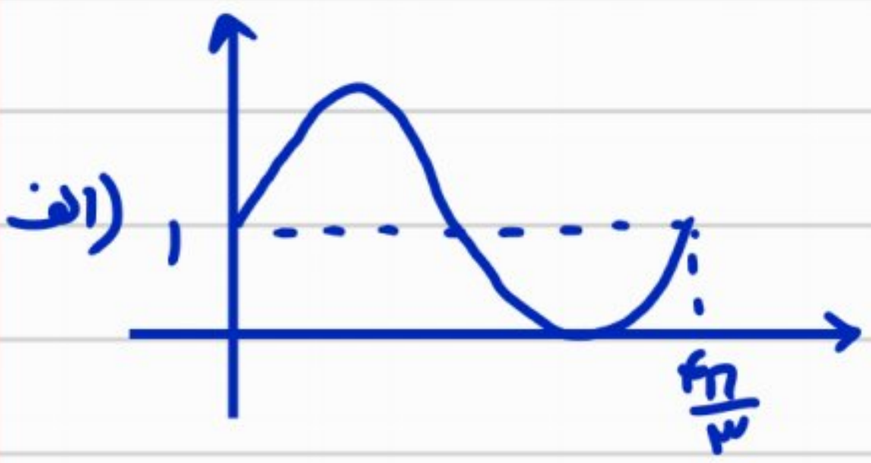




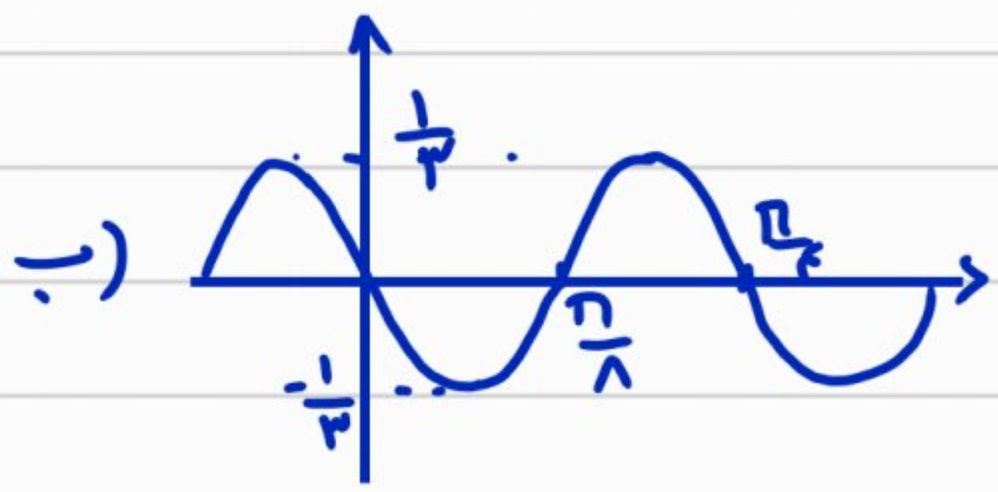
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۴) قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ رسم شده است. مقادیر a و b و c را تعیین کنید:

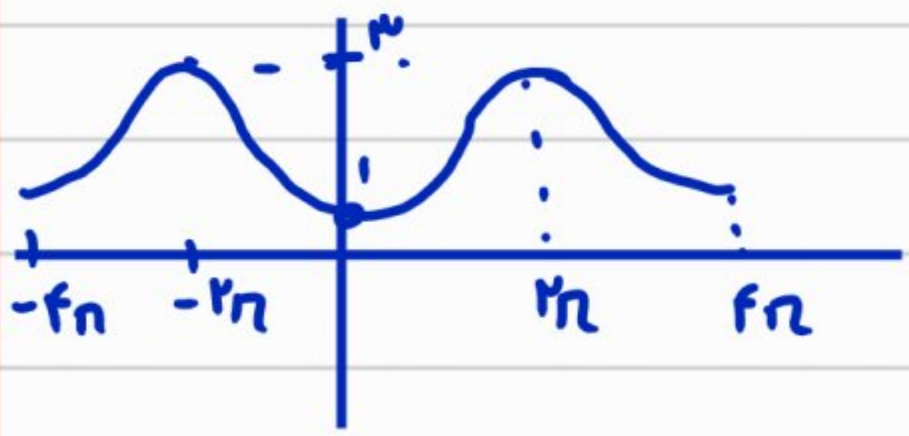
الف)

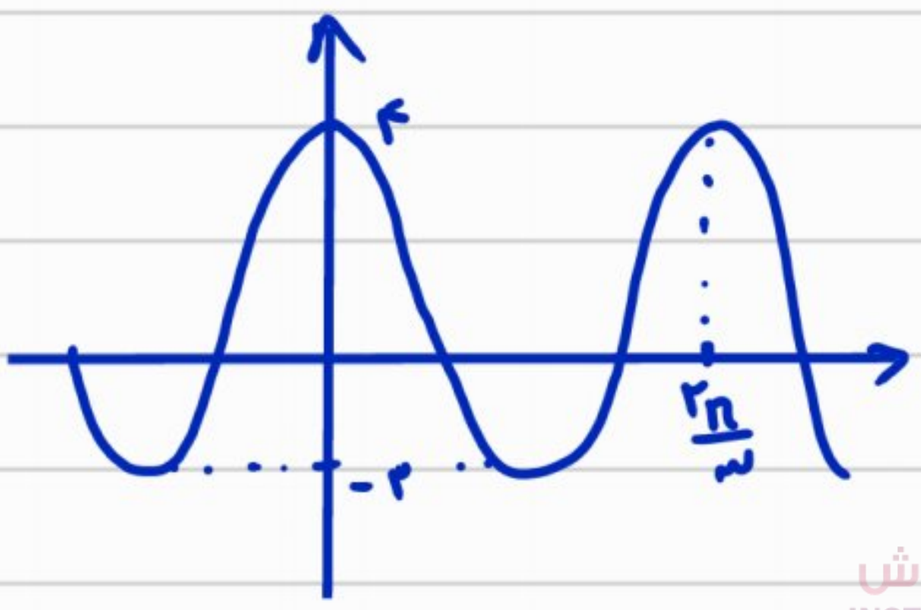


ب)



۵) ضابطه مربوط به یکی از نمودارهای داده شده به صورت $y=a\cos(bx)+c$ است. ضابطه آن را بنویسید:





فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس : نسیبه دهنوی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان :

۶) مقادیر $\sin 22/5$ و $\cos 22/5$ را بدست آورید :

۷) اگر $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه‌ای تند باشد حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$\sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha$

۸) فرض کنید $\tan\alpha = \frac{-1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید :

۹) اگر $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید :

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۱۰) درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$

ب) $\frac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \tan 2x$

ج) $\frac{2}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin 2\alpha$

۱۱) اگر $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 2$ باشد مقادیر مثبت $\sin x$ و $\cos x$ را بدست آورید.

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس : نسیبه دهنوی

معادلات مثلثاتی :

۱۲) هرکدام معادلات زیر را حل کنید :

الف) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ج) $\sin 4x + \sin 2x = 0$

د) $\sin\left(\frac{4\pi}{2} + 4x\right) - \cos(\pi - x) = 0$

ه) $\cos x(2\cos x + 1) + 1$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۲) $(1+\tan^2 x)\cos^2 x + 1 = 2\sin^2 x$

۱۳) خط $y = \frac{1}{2}$ نمودار تابع $y = \cos 2x$ را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس : نسیبه دهنوی

$y = a\sin(bx) + c$ — Max: $|a| + c$ ، min: $-|a| + c$

$T = \frac{2\pi}{|b|}$

$y = a\tan bx + c$ — $T = \frac{\pi}{|b|}$

بابام و یا رحدا

مثلثات

تناوب و نمودارهای مثلثاتی :

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیم هریک از توابع زیر را بدست آورید :

الف) $y = -2 + 5\sin 4x$ (a = 5) $\rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ ، $Max = 5 - 2 = 3$ ، $min = -5 - 2 = -7$

ب) $y = \sqrt{2} - 3\cos(\frac{\pi}{4}x)$ (a = 3) $\rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$ ، $Max = 3 + \sqrt{2}$ ، $min = -3 + \sqrt{2}$

ج) $y = 3\sqrt{2}\sin(-\frac{1}{3}x) \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 6\pi$ ، $Max = 3\sqrt{2}$ ، $min = -3\sqrt{2}$

د) $y = -\pi\cos(2x) - 1 \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ ، $Max = \pi - 1$ ، $min = -\pi - 1$

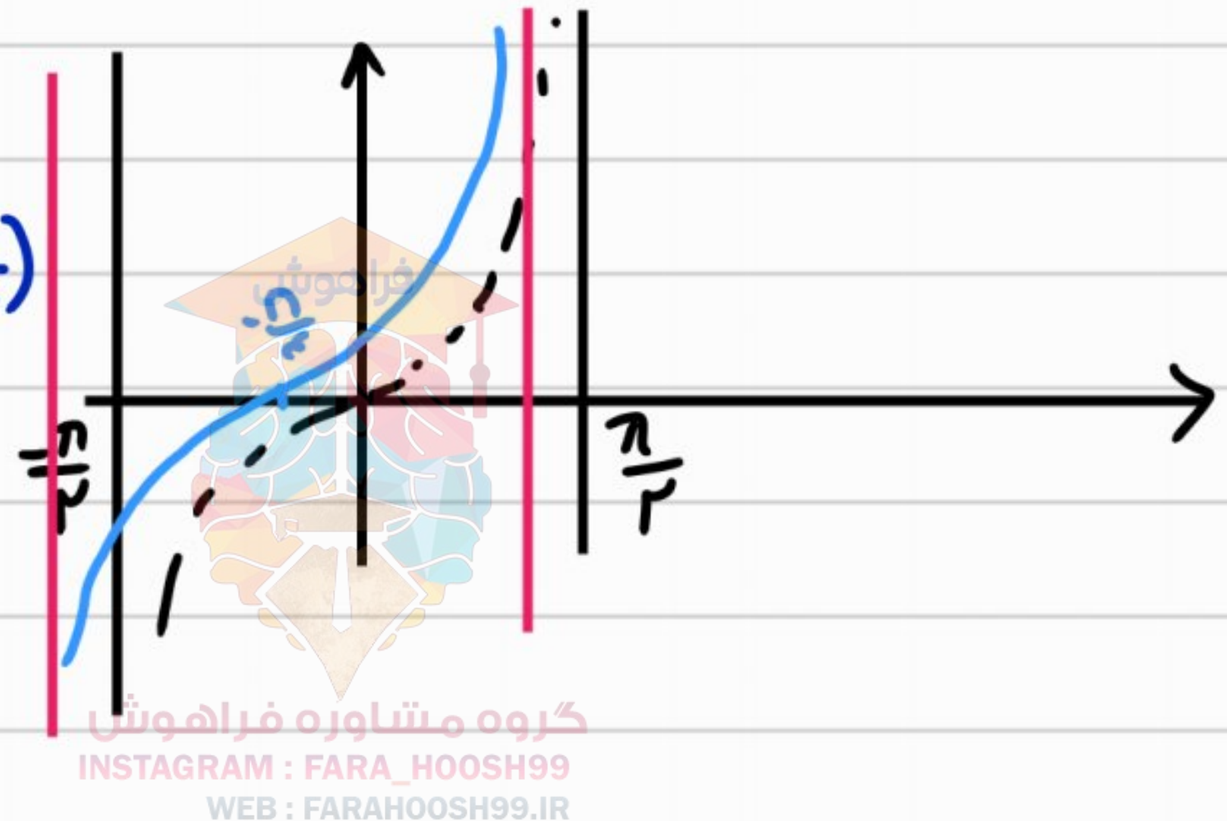
ه) $y = 3 + \sqrt{2}\tan(4x) \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$

۲) دوره تناوب هریک از توابع زیر را بدست آورید و نمودار آنها را در یک دوره تناوب رسم کنید:

الف) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ ، $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

ب) $y = \tan(x + \frac{\pi}{2})$

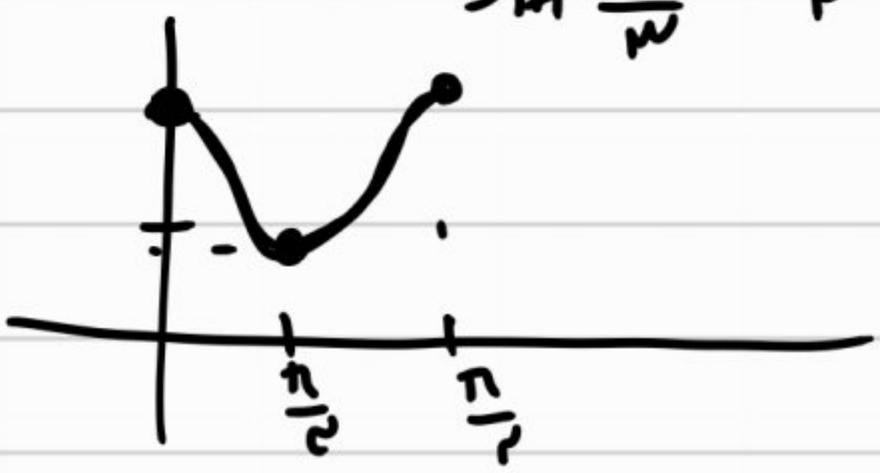


گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

Scanned with CamScanner

ب) $y = 2 + \sin(4x)$ $\quad T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$



۳) هریک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر تطبیق کنید :

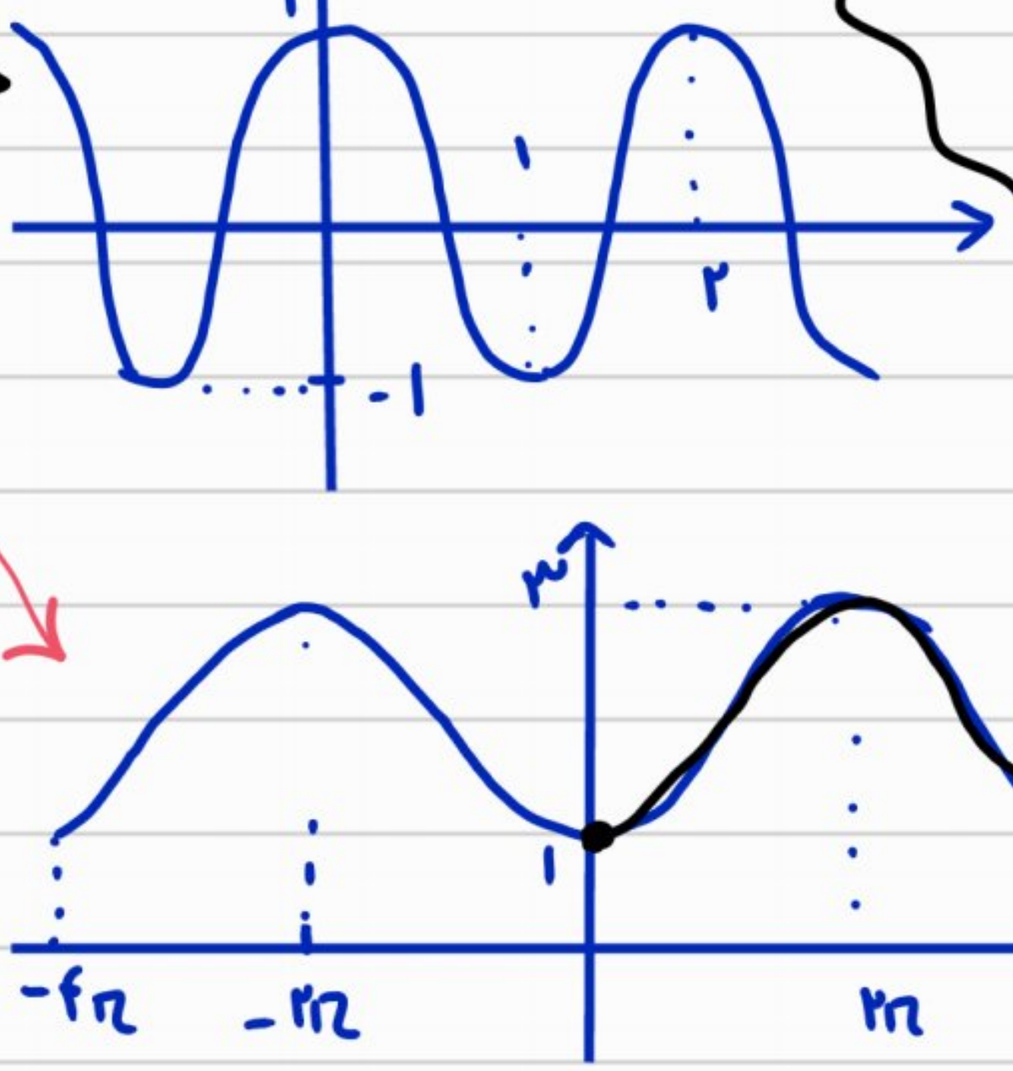
Max : 1
min : -1

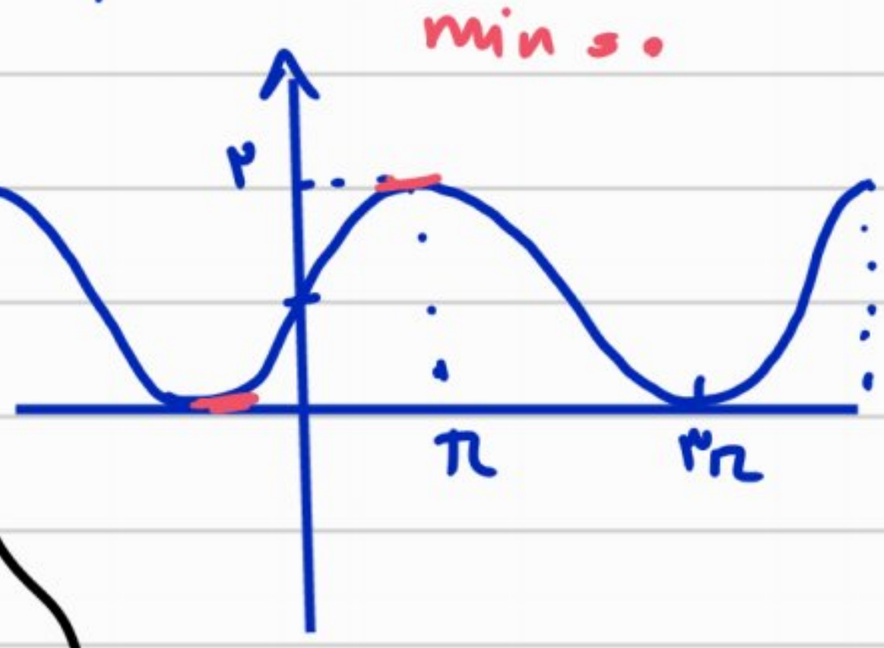
1) $y = \cos(\pi x)$

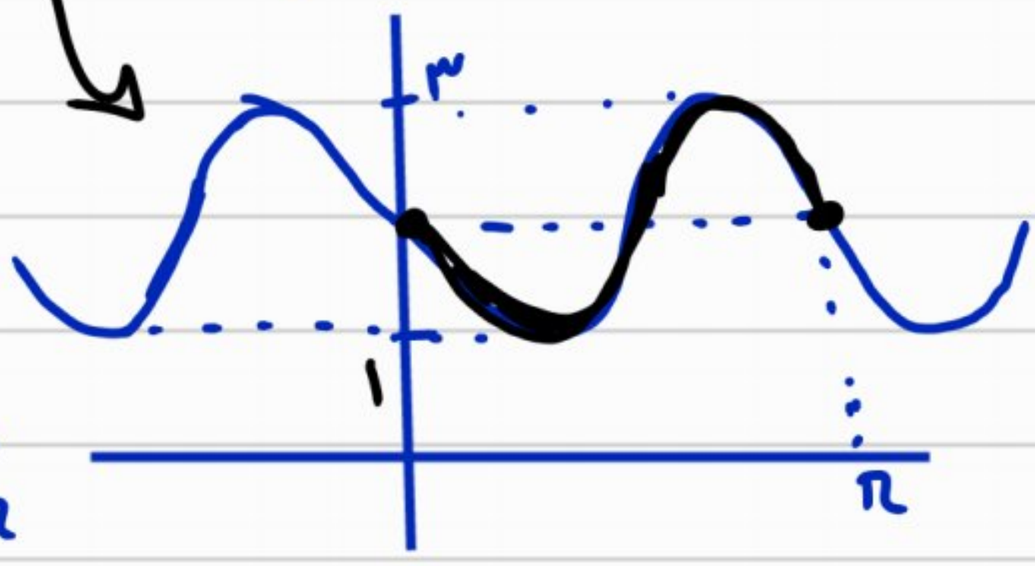
2) $y = 2 - \sin(2\pi x)$ → Min = 1, Max = 3, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

3) $y = 2 - \cos(\frac{x}{2})$ Max: 2+1 = 3, min: 2-1 = 1

4) $y = \sin(\frac{x}{2}) + 1$ Max : 2, min : 0



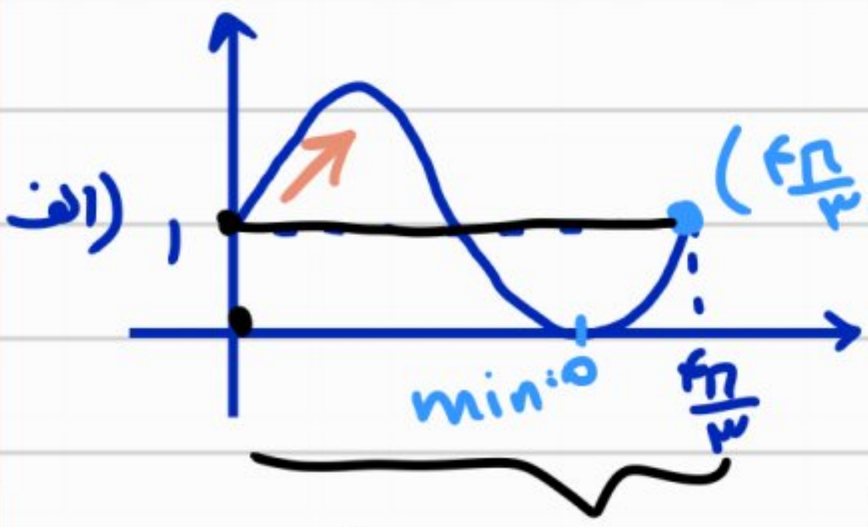




گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۴) قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ رسم شده است. مقادیر a و b و c را تعیین کنید:

الف)



$y=a\sin(bx)+c$

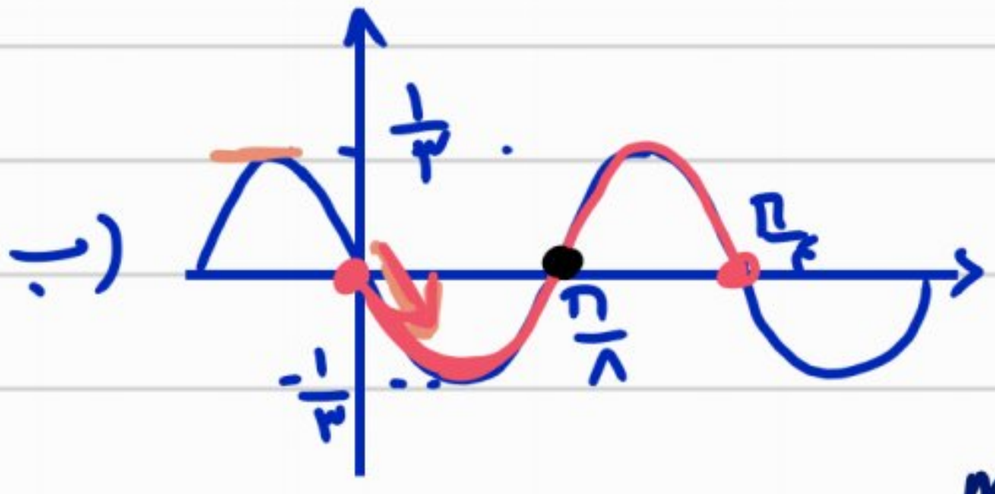
$ax-1+c=0 \Rightarrow -a+c=0$

$1=a\sin(\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3})+c \Rightarrow c=1$

$-a+1=0 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$

$T=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\frac{4\pi}{3} \rightarrow b=\frac{3}{2}$

ب)



Max: $\frac{1}{2}=a\times-1+c$

$\begin{cases} -a+c=\frac{1}{2} \\ \text{min}: -\frac{1}{2}=a\times1+c \end{cases}$

$a+c=-\frac{1}{2}$

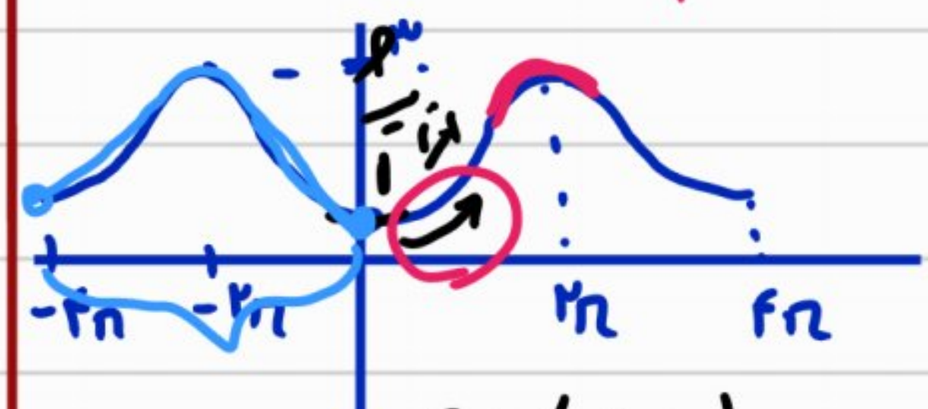
$\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b|=\frac{1}{2}$

$b=-\frac{1}{2}$

$c=0$

$a=-\frac{1}{2}$

۵) ضابطه مربوط به نوع کسینوسی از نمودارهای داده شده به صورت $y=a\cos(bx)+c$ است. ضابطه آن‌ها را بنویسید:



$y=a\cos(bx)+c$

1

-1

$\text{min}: 1=a\times1+c \rightarrow a+c=1$

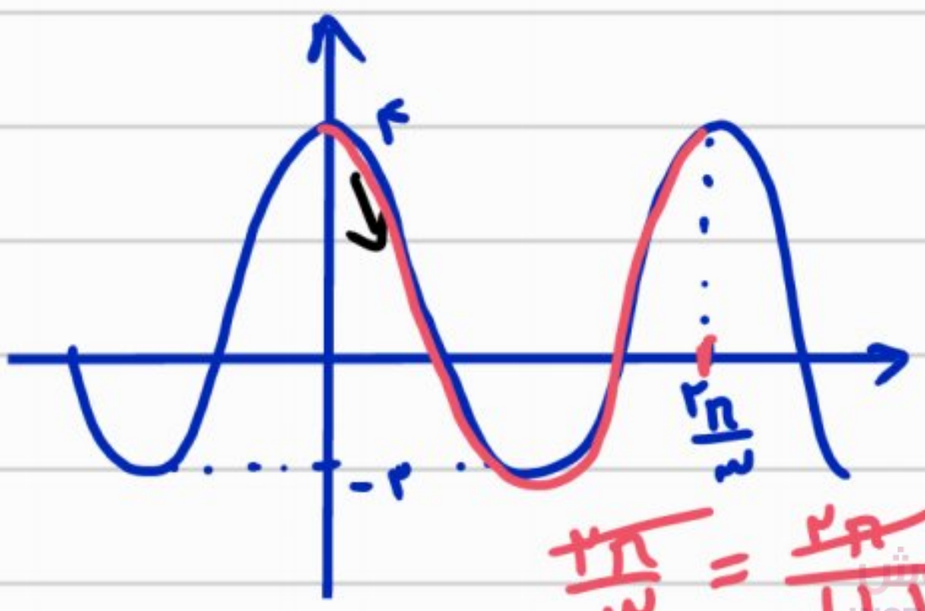
$4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2 \rightarrow b=2$

$\begin{cases} a+c=1 \\ a+c=3 \end{cases}$

$2c=4 \rightarrow c=2$

$\text{Max}: 3=a\times-1+c \rightarrow -a+c=3$

$a+2=1 \rightarrow a=-1$



Max: $4=a\times1+c \rightarrow a+c=4$

min: $-2=a\times-1+c \rightarrow -a+c=-2$

$2c=2 \rightarrow c=1$

$a+1=4 \rightarrow a=3$

$\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow b=3$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

Scanned with CamScanner

مدرس : نسیبه دهنوی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان :

۶) مقادیر $\sin 22/5$ و $\cos 22/5$ را بدست آورید :

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

دو برابر

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

نصف

$\sin 45 = 2\sin 22/5 \cos 22/5$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \times \cos 22/5$

$\cos 22/5 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$1 - \cos 45 = 2\sin^2 22/5$

$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin^2 22/5 \rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \sin^2 22/5 \rightarrow \sin 22/5 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

---

۷) اگر $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه ی تند باشد حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$

مثلثه

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = +\frac{3}{5}$

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$1 - \cos 2\alpha = 2 \times \frac{16}{25}$

$1 - \frac{32}{25} = \cos 2\alpha$

$\frac{25-32}{25} = \cos 2\alpha$

---

۸) فرض کنید $\tan\alpha = \frac{-1}{2}$ و α منفرجه باشد حاصل $\cos 2\alpha$ را بدست آورید :

$1 - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$1 - \cos 2\alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2$

$1 - \frac{8}{5} = \cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

منفرجه $\rightarrow$ منفی

$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

---

۹) اگر $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و α منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بدست آورید :

$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

Scanned with CamScanner

۱۰) درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$ طرف اول: $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}$ ∴ طرف دوم $= \tan\alpha$

ب) $\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ $\cos^2 x - \sin^2 x$ $= \tan 2x$ ⇝ طرف اول $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$ ∴ طرف دوم

ج) $\frac{2}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin 2\alpha$

طرف اول: $\frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \left(\frac{2}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ ∴ طرف دوم

---

۱۱) اگر $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 2$ باشد مقادیر مثبت $\sin x$ و $\cos x$ را بدست آورید.

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+\frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$ غق ق

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$ غق ق

$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 2$

$\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = 2$

$\Rightarrow \cot x = 3$

$\tan x = \frac{1}{3}$

لیسه دهقون

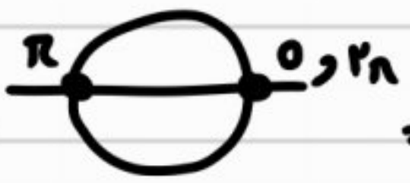
فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس : نسیبه دهنوی

معادلات مثلثاتی :

۱۲) هرکدام معادلات زیر را حل کنید :

الف) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0 \rightarrow \sin x\,(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$ ⟨ $\sin x = 0$; $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$\sin x = 0 \rightsquigarrow$  $\Rightarrow x = k\pi$ ✓

$2\sin x = -\sqrt{3} \rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ حفظ $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi + \alpha$; $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ✓ ; $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$ ✓

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ ✗ $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$ ⟨ $\cos x = 0 \rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

حفظ $x = 2k\pi \pm \alpha \rightsquigarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

ج) $\sin 4x + \sin 2x = 0$

$\sin 4x = -\sin 2x \rightarrow \sin 4x = \sin(-2x)$ (α)

$4x = 2k\pi + (-2x)$ ← $4x = 2k\pi + \pi - (-2x) \rightarrow 2x = 2k\pi + \pi$

$6x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} = \frac{k\pi}{3}$; $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

د) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \cos(\pi - x) = 0$

$-\cos 2x + \cos x = 0 \rightarrow 1 - \cos 2x = 1 - \cos x$ (α)

$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi$

$2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$

ه) $\cos x(2\cos x + 1) + 1 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$; $\cos x = t$

$2t^2 + t + 1 = 0 \rightsquigarrow \Delta = 1 - 4(2)(1) = 1 + 8 = 9$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2}$ ⟨ $\frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$; $\frac{-1-3}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = (2k+1)\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

۲) $(1+\tan^2 x)\cos^2 x + 1 = 2\sin^2 x$

$\frac{1}{\cos^2 x} \times \cos^2 x + 1 = 2\sin^2 x \rightarrow \cos x + 1 = 2\sin^2 x$

$\cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) \Rightarrow \cos x + 1 = 2 - 2\cos^2 x$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$

$\rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

$t = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$t = \frac{-4}{4} = -1$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

(در فاصله $[-\pi, \pi]$)

۱۳) خط $y = \frac{1}{2}$ نمودار تابع $y = \cos 2x$ را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{3}$

$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

k اعداد دلخواه صحیح

$k=0 \rightarrow \pm\frac{\pi}{6}$ ✓

$k=1 \rightarrow \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ غ ق ق

$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ✓

$k=-1 \rightarrow -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ ✓

$-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$ غ ق ق

لیسه دهنوی

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner