باهم و یار خدا

مدرس : نسیبه دهنوی

تجزیه‌پذیری چند جمله‌ای‌ها و رفع ابهام

۱) باقیمانده تقسیم $F(x)=3x^3-5x^2+7x-1$ را بر $x-2$ بدست آورید و سپس به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید:

۲) فرض کنید $F(x)=2x^3+ax^2+bx-10$ باشد. اگر $F(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم $F(x)$ بر $x-2$ برابر ۲۰ باشد مقادیر a و b را بدست آورید:

۳) حاصل هریک از حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x}$

ب) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

ب) $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+4} + x}{x^2 - 4}$

پ) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$

ت) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+1} + 1}{x^2 + 3x + 4}$

$x \to -2$

۱۴) a را طوری بیابید که $\lim_{x \to 2a} \frac{x - 2a}{x^2 - 4a^2} = \frac{1}{8}$ باشد.

$x \to 2a$

حدی بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت :

۵) حاصل حدهای زیر را در صورت توجه بدهید:

الف) $\lim_{x \to 1} \frac{3}{(x-1)^2}$

ب) $\lim_{x \to 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$

پ) $\lim_{x \to \pi^-} \frac{2}{1 + \cos x}$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس: نسیبه دهنوی

ت) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x+1|}$

ث) $\lim_{x \to (-2)^+} \frac{[x]+2}{x^3+2x}$

۶) اگر $\lim_{x \to 3} \frac{4x}{x^2+ax+b} = +\infty$ باشد a و b را بدست آورید:

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

Scanned with CamScanner

۷) حاصل حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x + 1 + 3x^4}{1 - x^4} =$

ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^6 + x}}{2x^3 + 1}$

ج) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 9}{2x + \sqrt{x^2 - 2}}$

د) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(5-x)}{2x^3 + 1}$

۸) a و b را طوری بیابید که

$\lim \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^b - 1} = -\frac{2}{3}$

باشد.

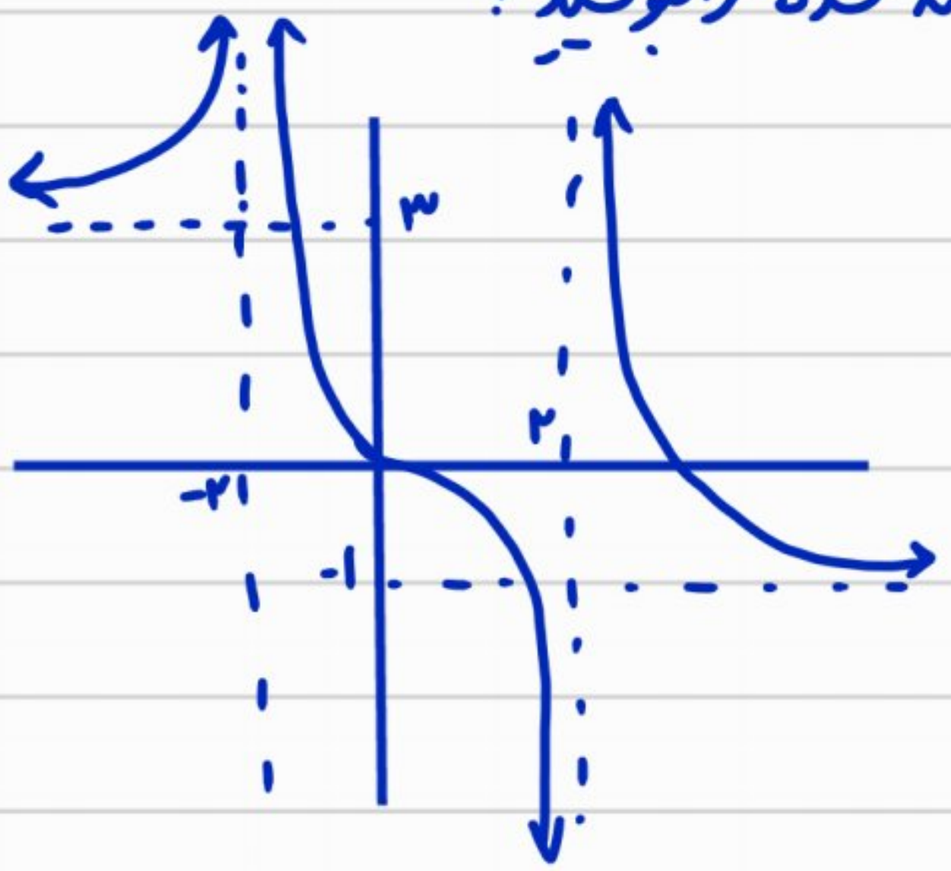
$x \to +\infty$

۹) اگر $\lim \frac{4x + \sqrt{ax^2 + 5}}{3x^b + 2} = 2$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید:

$x \to +\infty$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۱۰) باتوجه به نمودار تابع f حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید:



۱) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

۲) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

۳) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

۴) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

۵) $\lim_{x \to (-2)^-} f(x) =$

۶) $\lim_{x \to (-2)^+} f(x)$

۱۱) نمودار هرکدام از توابع زیر را رسم کنید و سپس حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -x + 4 & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

باقیمانده و یا رحدا

تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها و رفع ابهام

f بر $x-a$:
$f(x) = (x-a)q(x) + R(x)$

۱) باقیمانده تقسیم $f(x)=3x^3-5x^2+7x-1$ بر $x-2$ را به دست آورید و $f(a)$ را به صورت $f(a) = x-a$ بنویسید.

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$f(2)=3\times(2)^3-5(2)^2+7(2)-1$

$f(2)=24-20+14-1=17$

$3x^3-5x^2+7x-1 \mid x-2$
$3x^3-6x^2 \quad | \; 3x^2+x+9$
x^2+7x-1
x^2-2x
$9x-1$
$9x-18$
17

حاصل ضرب عامل‌ها تولید:

$f(x)=(x-2)(3x^2+x+9)+17$

۲) فرض کنید $f(x)=2x^3+ax^2+bx-10$ باشد. اگر $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ برابر ۲۰ باشد مقادیر a و b را به دست آورید:

$x=-2$ ← بخش‌پذیر
$x=2$ ← باقیمانده

$f(-2)=0$

$0=2\times(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-10$

$0=-16+4a-2b-10$

$4a-2b=26$

$f(2)=20$

$20=16+4a+2b-10$

$4a+2b=14$

$\begin{cases} 4a-2b=26 \\ 4a+2b=14 \end{cases}$

$8a=40 \rightarrow a=5$

20
$4\times5+2b=14$
$2b=-6$
$b=-3$

۳) حاصل هرکدام از حدهای زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-5x+4}{x^2-x} = \lim \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-1)} = \frac{-3}{1} = -3$

ب) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \lim \frac{(2x-1)^2}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)}$

$x-\frac{1}{2}=0$ ← مخرج صفر شد

$= \lim \frac{(2(x-\frac{1}{2}))^2}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)} = \frac{4\times(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)} = \frac{0}{3}=0$

$2x^2+x-1 \mid x-\frac{1}{2}$
$2x^2+x \quad | \; 2x+2$
-1
-1
0

فراهوش
خروجی مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

ب) $\lim_{x\to -2} \frac{(\sqrt{x+6}+x)}{x^2-4} \times \frac{(\sqrt{x+6}-x)}{\sqrt{x+6}-x} = \frac{(\sqrt{x+6})^2 - x^2}{(x^2-4)\times 4} = \frac{-(x^2-x-6)}{(x-2)(x+2)\times 4}$

$= \lim_{x\to -2} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)\times 4} = \frac{5}{-16}$

موافق

ج) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

مخالف

ج) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x^2+5x+6} \times \frac{((\sqrt[3]{x+1})^2 - \sqrt[3]{x+1}+1)}{((\sqrt[3]{x+1})^2 - \sqrt[3]{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3+1^3}{(x+2)(x+3)\times 3}$

$= \frac{x+1+1}{3(x+2)(x+3)} = \frac{x+2}{3(x+1)(x+3)} = \frac{1}{3(-2+3)} = \frac{1}{3}$

۱۴) a را طوری بیابید که $\lim_{x\to 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} = \frac{1}{8}$ باشد.

$\lim_{x\to 2a} \frac{x-2a}{(x-2a)(x+2a)} = \frac{1}{8}$

$x \to 2a$

$\frac{1}{4a} = \frac{1}{8} \to 4a = 8$

$a = 2$

حدی بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت:

$\frac{\text{عدد}+}{0^+} = +\infty$

$x \to 0$

۱۵) حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{(1-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \lim \frac{1-2}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$x \to 2^-$

ج) $\lim_{x\to \pi^-} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{1+\cos\pi} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$x \to \pi^-$

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

مدرس: نسیبه دهنوی

ت) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x+1|} = \frac{-1}{|2x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x \to -\frac{1}{2}$ کمی کمتر از $-\frac{1}{2}$ یعنی -0.9

ث) $\lim_{x \to (-3)^+} \frac{[x]+2}{x^2+3x}$ $= \frac{-3+2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$x \to (-3)^+$ کمی بزرگتر از -3 یعنی -2.9

$+4-6=-2$

ج) اگر $\lim \frac{4x}{(x-3)^2(x^2+ax+b)} = +\infty$ باشد a و b را بدست آورید:

$\frac{12}{0} = \infty$

$(x-3)^2 = x^2-6x+9$

$x-3$ ضریب x^2 تابع مخرج

$9+3a+b=0$

$3a+b=-9$

$\frac{12}{0^+} = +\infty$

علامت؟ $-$

$x = \frac{-b}{2a}$

$3 = \frac{-a}{2(1)} \rightarrow a=-6$

$b = -9+18$

9

نه ضریب x مخرج تابع

فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR

Scanned with CamScanner

$\frac{\infty}{\infty}$: هم‌مرتبه

۷) حاصل حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1 + 3x^4}{1 - x^4} = \frac{3x^4}{-x^4} = -3$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^4+x}}{2x^3+1} = \frac{10x^2}{2x^3} = \frac{10}{2x} = \frac{10}{-\infty} = 0$

$\sqrt{x^4+x} \sim |x|$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ و $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

پ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+9}{2x+\sqrt{x^2-2}} = \frac{3x}{2x+|x|} = \frac{3x}{2x+x} = \frac{3x}{3x} = 1$

$|x| = x$ چون $x \to +\infty$

جمع‌بندی:
توان صورت = توان مخرج ⇐ عدد
توان صورت < توان مخرج ⇐ ∞
توان صورت > توان مخرج ⇐ 0

ت) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1} = \frac{-x^3}{2x^3} = \frac{-1}{2}$

$-x^3$

---

۸) a و b را طوری بیابید که $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{4x^b - 1} = \frac{-2}{3}$

$\frac{ax^3}{4x^b} = -\frac{2}{3}$ ← $b = 3$

$\frac{a}{4} = -\frac{2}{3} \to a = \frac{-12}{3} = -4$

---

۹) اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x + \sqrt{ax^2+a}}{3x^b + 2} = 2$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x + \sqrt{a}|x|}{3x^b} = \frac{(4+\sqrt{a})x}{3x^b} = 2$

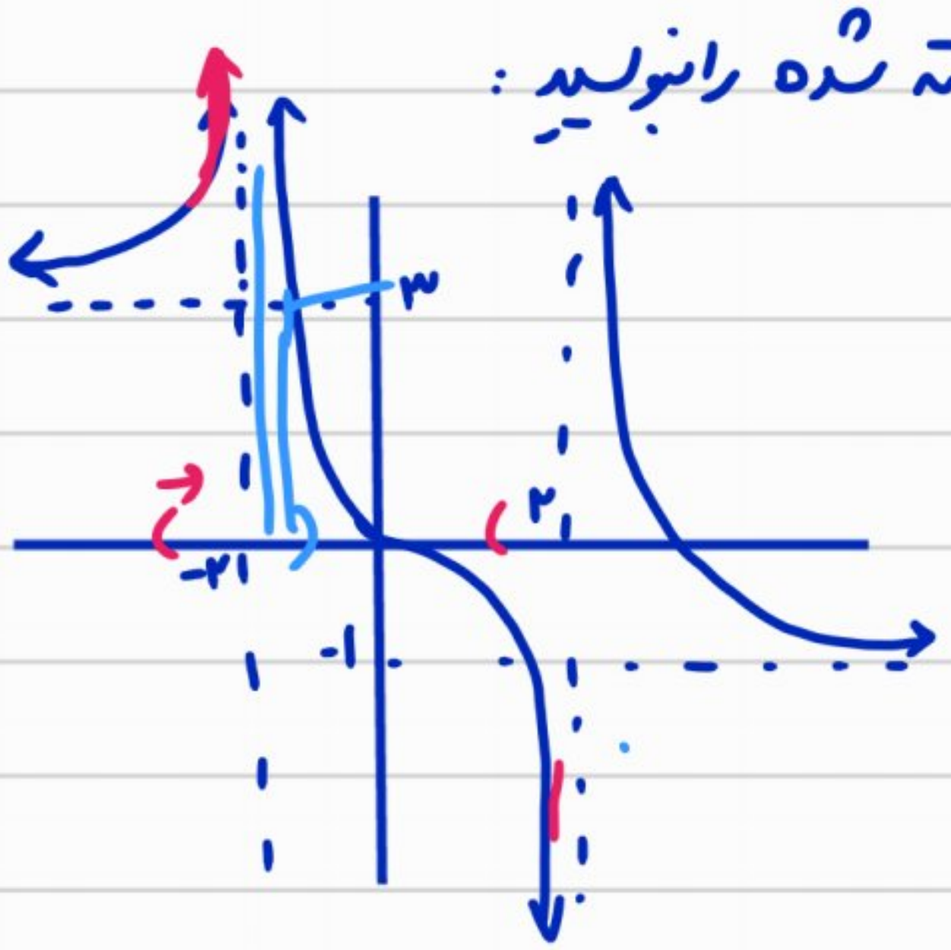
$b = 1$

$\frac{4+\sqrt{a}}{3} = 2 \to 4 + \sqrt{a} = 6$

$\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$

گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner

۱۰) باتوجه به نمودار تابع f حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید:



۱) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

۲) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۳$

۳) $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty$

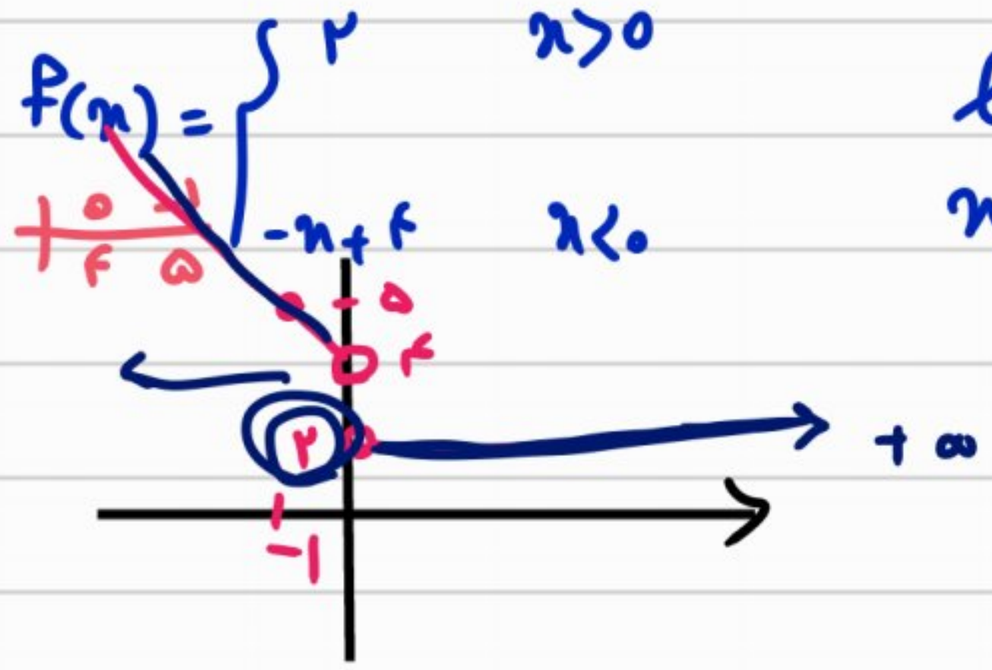
۴) $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -\infty$

۵) $\lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = +\infty$

۶) $\lim_{x \to (-۲)^+} f(x) = +\infty$

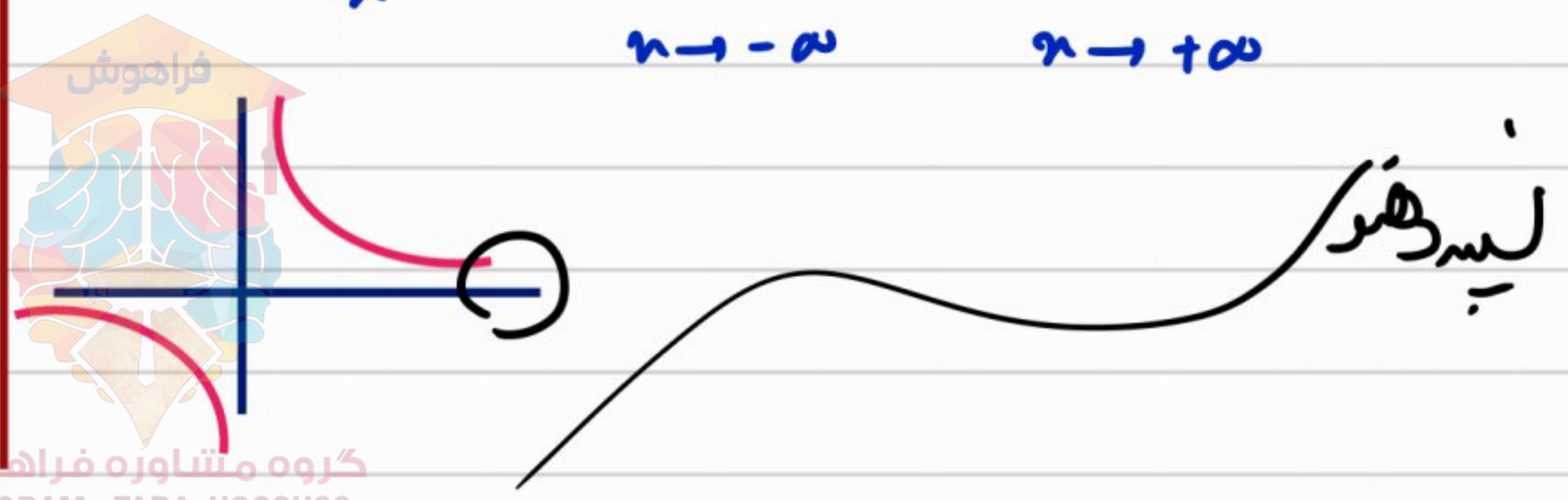
۱۱) نمودار هرکدام از توابع زیر را رسم کنید و سپس حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید:

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۰ \\ -x + ۴ & x < ۰ \end{cases}$$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$

$f(x) = \frac{۱}{x}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۰$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰$



فراهوش
گروه مشاوره فراهوش
INSTAGRAM : FARA_HOOSH99
WEB : FARAHOOSH99.IR
Scanned with CamScanner