

۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  را در نقطه  $x=5$  طول  $\pi$

بدست آورید:

۲) مشتق توابع زیر را بدست آورید:

الف)  $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(x^3 + x)$

ب)  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4}$

ج)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

د)  $f(x) = \left(\frac{x^3+1}{x}\right)^2$



$$\Rightarrow \sqrt{x(x-1)} + (x^3 + 2x)$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x})^2 \times \frac{1}{x}$$

۳) اگر  $f(x) = -1$  و  $f'(x) = 2$  و  $g(x) = x^4$  و  $g'(x) = -2$  باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

الف)  $(fg)'(x) =$

ب)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$

ج)  $(5f + 3g)'(x) =$

۴) دامنه مشتق پذیر توابع زیر را بدست آورید:

الف)  $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

ب)  $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

ج)  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$





(۵) اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = x^2 + 2x$  باشد  
متنق  $F \circ g$  را بدست آورید:

(۶) اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$  و  $g'(x) = \frac{x+3}{x-1}$  و  $F(x) = (g \circ f)(x)$  حاصل  $F'(x)$   
را بدست آورید:

(۷) معادله خط مماس بر منحنی  $y = \frac{x}{x^2+4}$  در نقطه  $(2, 1/2)$  بنویسید:

(۸) نقاط را روی منحنی  $y = x^3 - 4x^2 + 3$  مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط  
افق باشد.

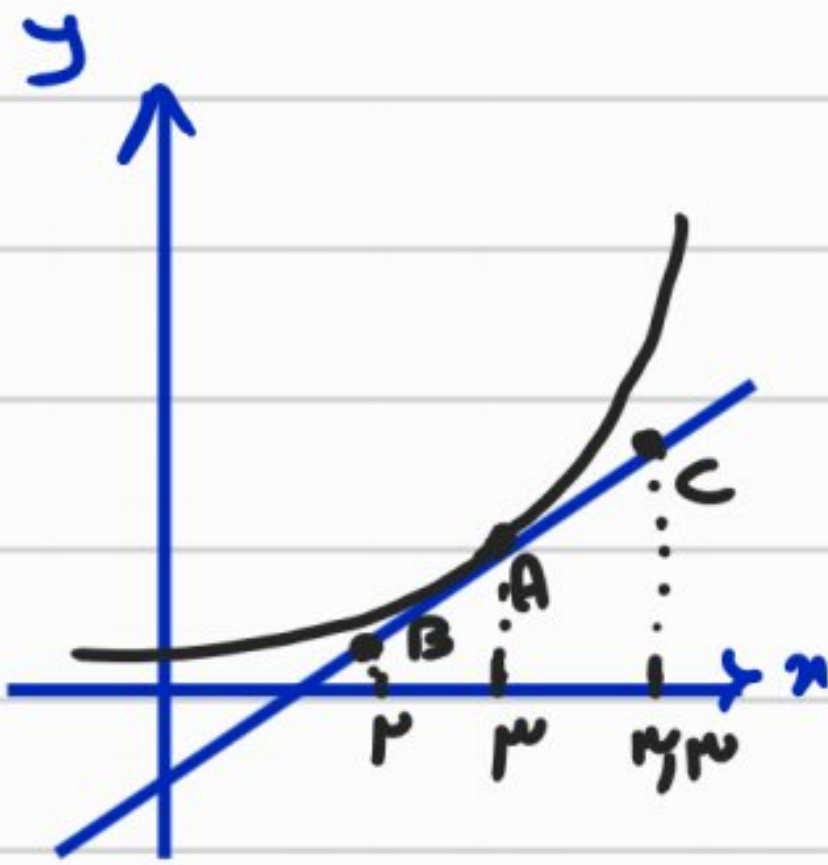
(۹) نشان دهید خط  $x=2$  مماس قائم بر منحنی  $f(x) = \sqrt{x-2}$  است.



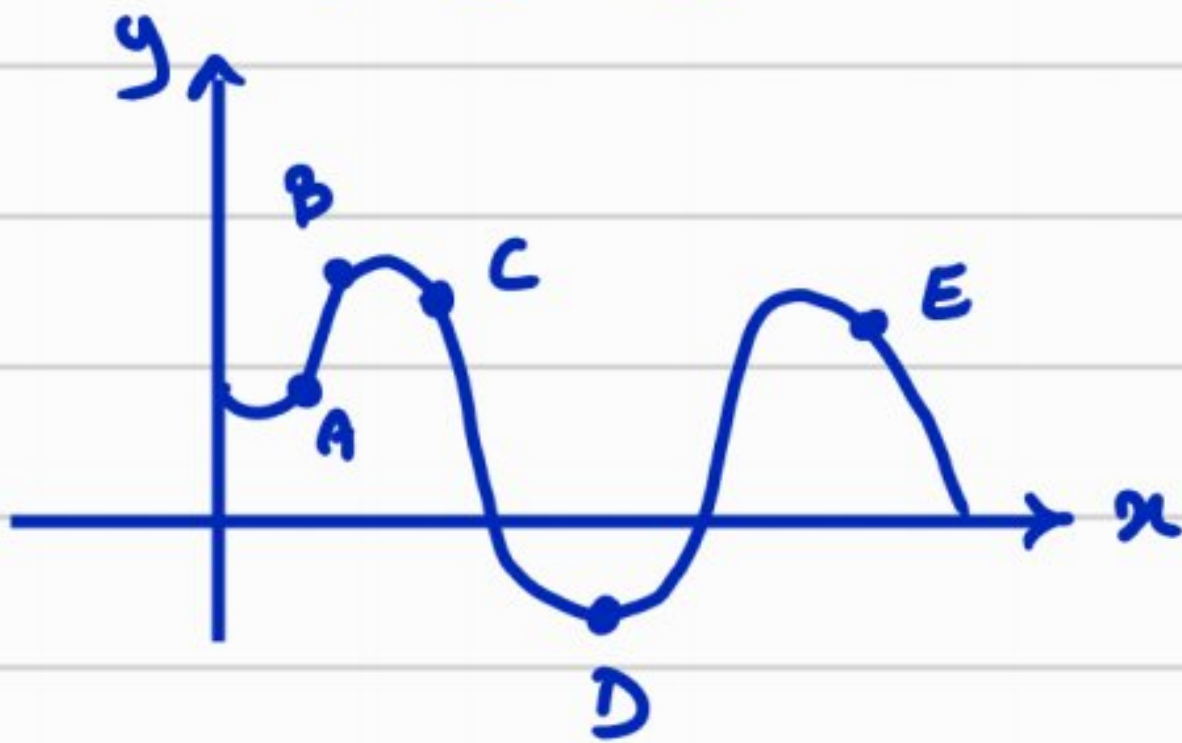


۱۰) نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است اگر  $f(2) = 2$  و  $f'(2) = 1$  باشد

نقطه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را مشخص کنید:



۱۱) نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی منحنی را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید



۱۲) اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b + 2 & x > 1 \\ ax^2 + x + 2b & x < 1 \end{cases}$  مشتق پذیر باشد مقادیر  $a$  و  $b$

را بدست آورید:





(۱۳) مشق بذریعہ تابع  $f(x) = x|x-1|$  رادر  $x=1$  برسر کنند:

(۱۴) مشق بذریعہ تابع  $y = x^2 - 4$  رادر  $x=2$  برسر کنند: پس معادلات نیم‌مایل را راست و صی در  $x=2$  را بنویسید:

(۱۶) تابع  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید:

ب) نشان دهید  $f(0)$  و  $f'(2)$  وجود ندارند.

ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید:

د) نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید:









بانام و یاد خدا

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

۱) بالساده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  را در نقطه  $x=5$  محاسبه کنید.  
 $f(5) = \sqrt{4} = 2$

بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - f(5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$f'(5) = \frac{1}{4}$$

۲) مشتق توابع زیر را بدست آورید:

الف)  $f(x) = (x^m - x + 1)(x^m + x)$

$$f'(x) = (mx^{m-1} - 1)(x^m + x) + (x^m + 1)(mx^m - 1)$$

ب)  $f(x) = \sqrt{x^m + 2x^m + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^m + 2x^m + 4}} \times (mx^{m-1} + 2x^{m-1})$

ج)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x+1}} = \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1(x+1) - 1(x+4)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x+4}{x+1}} (x+1)^2}$$

د)  $f(x) = \left(\frac{x^m+1}{x}\right)^m \rightarrow m \left(\frac{x^m+1}{x}\right)^{m-1} \times \left(\frac{mx^{m-1} - 1(x^m+1)}{x^2}\right)$

$$= \frac{-2(x^m+1)}{x^m}$$



$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n(n-1)}{n^2-n}} \oplus (n^3 + 2n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \times (2n-1) + 3n^2 + 2$$

$$\Rightarrow (n + \sqrt{n})^3 \times \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{عد}} (n + \sqrt{n})^3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \frac{1}{n} + \frac{-1}{n^2} (n + \sqrt{n})$$

$$\frac{\text{عد}}{\text{عد}} \xrightarrow{\text{عد}} \frac{\text{عد}}{(\text{عد})^2}$$

۳) اگر  $f(x) = -1$ ،  $f'(x) = 2$ ،  $g(x) = x^4$ ،  $g'(x) = -2$  باشد حاصل عبارت زیر زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } (fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 2 \times x^4 + (-2) \times (-1) = 10$$

$$\text{ب) } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{2x^4 - (-2)(-1)}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } (5f + 3g)'(x) = 5f'(x) + 3g'(x)$$

$$5 \times 2 + 3 \times (-2) = 10 - 6 = 4$$

۴) دامنه مشتق پذیر توابع زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} \quad D_f: x > 1 \quad \text{مشتق پذیر} \quad D: x > 0$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{1-2x} \quad 1-2x > 0 \rightarrow -2x > -1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad 9-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3$$



(5) اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = x^2 + 2x$  باشد  
 مشتق  $F \circ g$  را بدست آورید  
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$   
 $g'(x) = 2x + 2$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}} \times (2x^2+2)$$

(6) اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$  و  $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$  حاصل  $F(x) = (g \circ f)(x)$   
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}} \times (2x-3)$   
 $g'(x) = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow g'(1) = \frac{4}{0} = \infty$   
 $f(1) = \sqrt{1-3} = 2$   
 $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1-3}} \times (2-3) = \frac{1}{2\sqrt{-2}} \times (-1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$   
 $F'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = \infty \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\infty}{2}$

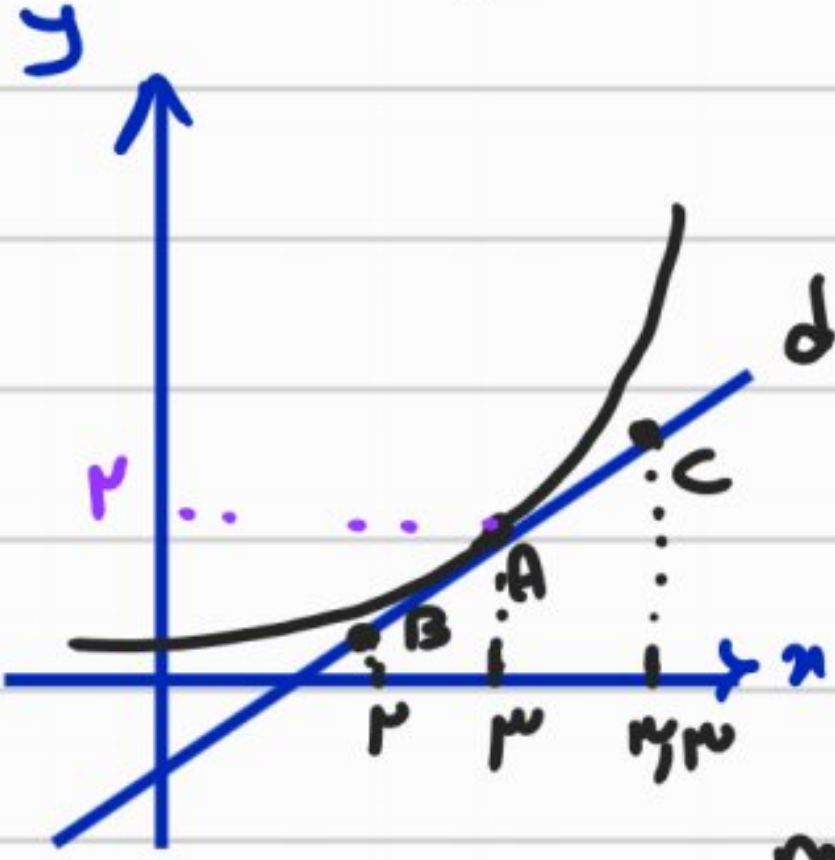
(7) معادله خط مماس بر منحنی  $y = \frac{x}{x^2+4}$  در نقطه  $(2, 0.125)$  بنویسید.  
 $y' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} \rightarrow y'(2) = \frac{2}{100} = 0.02$   
 $y = 0.02x + b \Rightarrow 0.125 = 0.02(2) + b \rightarrow b = 0.125 - 0.04 = \frac{1}{10} - \frac{2}{50} = \frac{10-4}{50} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$   
 $y = 0.02x + 0.12$

(8) نقاط را روی منحنی  $y = x^3 - 4x^2 + 3x$  مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط افقی باشد.  
 $y' = 3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x=0$   
 $3x(x-4) = 0 \Rightarrow x=4$   
 گوییم خط مماس صاف است  
 $f'(x) = 0$

(9) نشان دهید خط مماس قائم بر منحنی  $f(x) = \sqrt{x-2}$  است.  
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$   
 $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2-2}} = \frac{1}{0} = \infty$   
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{0} = \infty$



۱۰) نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است اگر  $f(3) = 2$  و  $f'(3) = 1$  باشد



نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  را مشخص کنید:

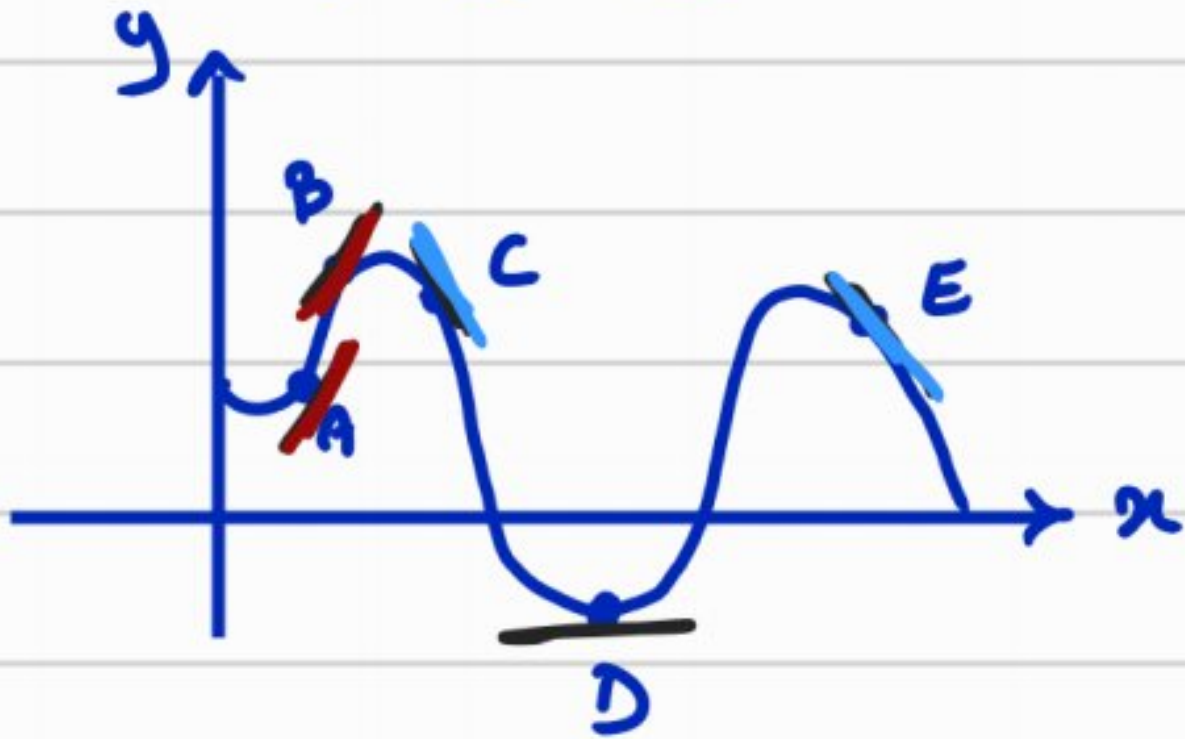
$$m_{AB} = \frac{f(A) - f(B)}{x_A - x_B} \rightarrow 1 = \frac{2 - f(B)}{\frac{3}{2} - 3}$$

$$f(B) = 2 - 1 = 1 \rightarrow B: (2, 1)$$

$$m_{AC} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} \rightarrow 1 = \frac{f(C) - 2}{\frac{3}{2} - 3} \rightarrow f(C) - 2 = 1 \rightarrow f(C) = 3$$

$C: (3, 3)$

۱۱) نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $E$  روی منحنی را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید



$$A > B > D > E > C$$

کسب رهنمون

$$a(x)^{\frac{1}{3}} \rightarrow a \times \frac{1}{3} \times x^{-\frac{2}{3}}$$

۱۲) اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b + 2 & (x \geq 1) \\ ax^2 + x + 2b & (x < 1) \end{cases}$  مشتق پذیر باشد مقادیر  $a$  و  $b$

$a = b = 1$

شرط پیوستگی

$$\begin{cases} x=1 : a\sqrt{1} + b + 2 = a + b + 2 \\ x=1^- : a + 1 + 2b \\ x=1^+ : a + b + 2 \end{cases}$$

را بدست آورید:

$$a + b + 2 = a + 1 + 2b$$

$$b - 2b = 1 - 2 \rightarrow -b = -1$$

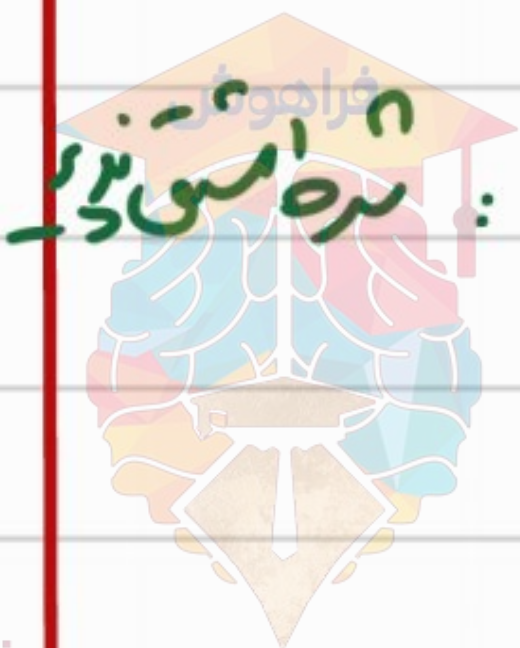
$$b = 1$$

$$\begin{cases} x=1 : 2a + 1 \\ x=1^- : \frac{a}{\sqrt{1}} \end{cases}$$

$$x=1$$

$$2a + 1 = \frac{a}{1}$$

$$2a + 1 = a \rightarrow a = -1$$





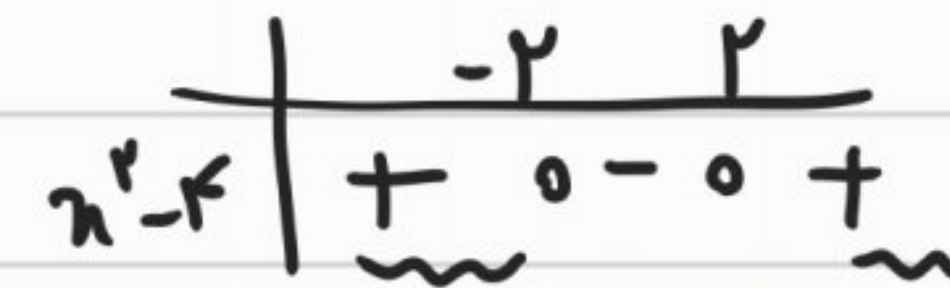
۱۳) مشتق پذیر تابع  $f(x) = x|x-1|$  رادر  $(x=1)$  برسر کنید :

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & x > 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

در  $x=1$  پیوسته است  $\rightarrow$   $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$  : شرط پیوستگی  
 شرط مشتق پذیری :  $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}$   
 $x=1 \Rightarrow 2(1)-1 = 1 > 0$  : مشتق پذیر است  
 $x=1 \Rightarrow 2(1)-1 = 1 < 0$  : مشتق پذیر است

۱۴) مشتق پذیر تابع  $y = x^2 - 4$  رادر  $(x=2)$  برسر کنید : پس معادلات نیم محال را  $y = ax + b$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \cup x > 2 \\ -(x^2 - 4) & -2 < x < 2 \end{cases}$$



شرط پیوستگی :  $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \checkmark$   
 شرط مشتق پذیری :  $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$   
 $x=2 \Rightarrow 2(2) = 4 > 0$   
 $x=2 \Rightarrow 2(2) = 4 < 0$   
 نیم محال :  $y = -4x + b'$   
 $3 = -4(1) + b' \Rightarrow b' = +7$   
 $y = -4x + 7$   
 $d = 4x^2 + b \rightarrow b = -7$

۱۶) تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید :



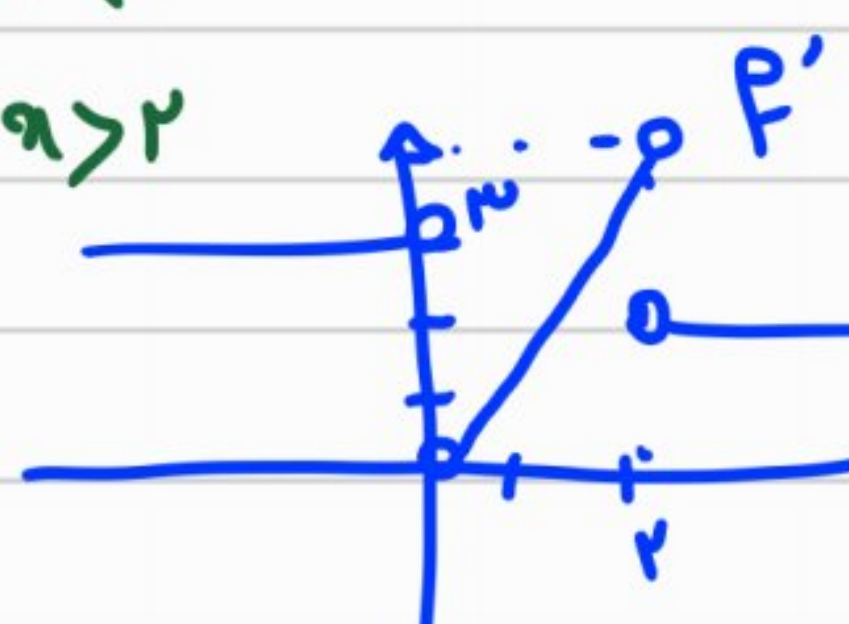
الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید :

ب) نشان دهید  $f(0)$  و  $f'(2)$  وجود ندارند.

ک) پیوسته است و نیم محال را در  $x=0$  و  $x=2$  رسم کنید

د) ضابطه تابع مشتق را بنویسید :

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$



ه) نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید :



